

### Der Übergangsbogen im Eisenbahngleis.

Zusammenfassender Bericht über die Lösung dieser lang umstrittenen Aufgabe.

Von Prof. Dr. Ing. E. h. Richard Petersen, Danzig.

I. Die Bedingungen der Gleisführung. — II. Die kubische Parabel als Übergangsbogen. — III. Der vollkommene Gleisbogen. — IV. Genauigkeit und Brauchbarkeit des Winkelbildverfahrens von Schramm.

Als man anfangs Eisenbahnen zu bauen, setzte man die Linie des Gleises aus Geraden und Kreisbögen zusammen, weil dies die einfachste Form war, in der man die Linie auf dem Lageplan darstellen und hiernach im Gelände abstecken konnte.

Die Fliehkraft in der Bahnkrümmung erforderte eine Überhöhung der äußeren Schiene im Bogen. Zwischen Gerade und Kreisbogen mußte daher in der äußeren Schiene eine Rampe zum Ausgleich des Höhenunterschieds eingefügt werden. Das genügte aber noch nicht. Man legte sodann zwischen Gerade und Kreisbogen einen Übergangsbogen, in dem der Krümmungshalbmesser  $\rho$  des Gleises allmählich von unendlich bis zum Halbmesser  $r$  des Kreisbogens abnahm. Üblich als Übergangsbogen wurde die kubische Parabel. Sie ist aber nur bedingt brauchbar. In einem umfangreichen Schrifttum, das sich beinahe über ein Jahrhundert erstreckt, ist die Frage des Übergangsbogens erörtert. Vorschläge für bessere Lösungen sind viele gemacht — ohne Erfolg.

Eine allgemein befriedigende, praktisch brauchbare bessere Lösung ist nicht gefunden worden, so lange man versuchte, die Gleichung des Übergangsbogens auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz zu beziehen. Hierüber später.

Die Lösung ist erst in neuester Zeit gefunden. Man kann nunmehr einen Bogen mit beliebigem Krümmungsverlauf (innerhalb der in Betracht kommenden Grenzen) herstellen durch Querverschiebung eines vorläufig angenommenen Bogens von einfachem Krümmungsverlauf. Das Verfahren ist entwickelt von Nalenz<sup>1)</sup>, Höfer<sup>2)</sup> und Schramm<sup>3)</sup>.

Damit ist eine ganz neue Grundlage geschaffen, aus der man die Gleisbögen in einfacher Weise, wie das Beispiel am Ende des Aufsatzes zeigt, den theoretischen Anforderungen in großer Vollkommenheit anpassen kann. Alles, was früher über die Form der Übergangsbögen geschrieben wurde, ist durch dieses Verfahren überholt.

Für den Neubau von Bahnen und für die Verbesserung vorhandener schlecht liegender Gleise kommt nur noch dieses Verfahren in Betracht.

Deshalb soll hier versucht werden, den Gedankengang unter Beschränkung auf das Grundsätzliche zu erläutern als Einführung in die Abhandlungen der vorgenannten Verfasser. Ferner soll das Verfahren auf seine Genauigkeit untersucht werden. Vorher aber mögen die allgemeinen Bedingungen der Gleisführung kurz zusammengefaßt werden.

<sup>1)</sup> Nalenz, Verfahren bei der Wiederherstellung der Gleisachse in Krümmungen. Zeitschrift des Rheinisch-Westfälischen Landmesservereins 1898, Heft 1. — Derselbe, Erläuterung zu der Anweisung für das Setzen von Gußständern. 1905. Eisenbahndirektion Köln.

<sup>2)</sup> Höfer, Die Absteckung von Gleisbogen aus Evolventenunterschieden. Berlin 1927. Julius Springer. — Derselbe, Die Beseitigung kurzer Geraden zwischen gleichwendigen Bogen. Org. Fortsch. Eisenbahnwes. 1930, Heft 8.

<sup>3)</sup> Schramm, Der vollkommene Gleisbogen. Berlin 1931. Julius Springer. — Derselbe, Allgemeine Theorie des Nalenz-Höfer-Verfahrens. Org. Fortsch. Eisenbahnwes. 1931, Heft 16. — Derselbe, Schwingungen beim Durchfahren von Überhöhungsrampen. Verkehrstechn. Woche 1931, Heft 31.

Bei der Gestaltung der Gleisbögen sind zu berücksichtigen: Die Fliehkraft in der Bahnkrümmung, die zulässige Überhöhung der äußeren Schiene, die zulässige Neigung der Überhöhungsrampe, endlich die Drehbeschleunigung der Lokomotive um die senkrechte Achse bei der Einfahrt und, was noch wichtiger ist, bei der Ausfahrt aus dem Gleisbogen.

#### I. Die Bedingungen der Gleisführung.

Im Gleisbogen setzen sich das Gewicht des Fahrzeugs  $G$  und seine Fliehkraft  $H$  zu einer Mittelkraft  $R$  zusammen, die unter  $\varphi$  gegen die Senkrechte geneigt ist (Abb. 1).

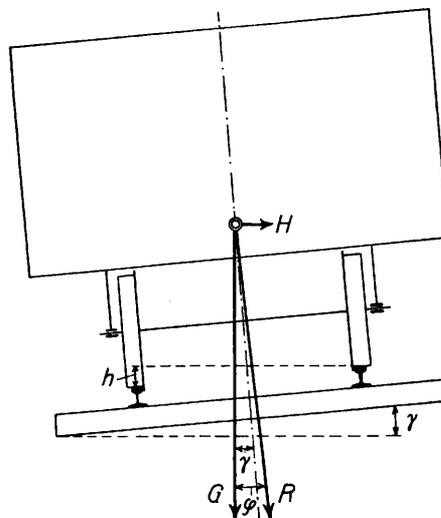


Abb. 1. Wirkung der Fliehkraft im Gleisbogen.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{G} = \frac{v^2}{9,81 r} \quad \begin{array}{l} \text{m/sec} \\ \text{m} \end{array}$$

$$1) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{V^2}{127 r} \quad \begin{array}{l} \text{km/h} \\ \text{m} \end{array}$$

Den heutigen Vorschriften der Deutschen Reichsbahngesellschaft über die Höchstgeschwindigkeit in den Gleisbögen entspricht etwa die Formel:

$$2) \quad \operatorname{tg} \varphi \leq 0,12 \quad \text{oder} \quad V^2 \leq 15 r$$

bei einer größten Querneigung des Gleises (Überhöhung  $h = 120 \text{ mm}$ )

$$3) \quad \operatorname{tg} \gamma \sim 0,08 \quad \text{oder} \quad V^2 \sim 10 r.$$

Die Geschwindigkeit, für die die Querneigung richtig ist, darf demnach auf das  $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{10}} \sim 1,25$ fache gesteigert werden.

Die Grenzen der zulässigen Geschwindigkeit liegen somit zwischen  $V = 0$  und  $V \sim 125\%$  der Geschwindigkeit, bei der  $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \gamma$  ist.

Die Vorschriften gelten für Gleise, die mit Zügen verschiedener Geschwindigkeit (Schnellzügen und Güterzügen) befahren werden.

Danach ist die zulässige Schwankung der Mittelkraft R um die Mittellage des Gleises begrenzt durch die Gleichungen:  
 4) . . .  $\text{tg } \varphi = \text{tg } \gamma + 0,04$  nach außen  
 $\text{tg } \varphi = \text{tg } \gamma - 0,08$  nach innen.

Man kann die Gleichungen 4) ansehen als das Ergebnis von Versuchen, die sich über viele Jahrzehnte erstreckten, und die dahin zielten, eine möglichst hohe Geschwindigkeit in den Bahnkrümmungen zu erreichen.

Bei Bahnen, deren Gleise mit Zügen gleicher Geschwindigkeit befahren werden (Stadtschnellbahnen), kann man die Querneigung größer nehmen. Hält man die Bedingung (Gleichung 4) für die zulässige Schwankung der Mittelkraft R um die Mittellage des Gleises fest und ändert man die Querneigung des Gleises, so zeigt Abb. 2, wie mit zunehmender Querneigung die Grenzen der zulässigen Geschwindigkeit immer enger werden (mit 100% ist die Geschwindigkeit bezeichnet, bei der  $\text{tg } \varphi = \text{tg } \gamma$  ist). In je engeren Grenzen man die Geschwindigkeit halten kann, um so größer kann man die Querneigung des Gleises nehmen. Nun darf man aber damit nicht zu weit gehen.

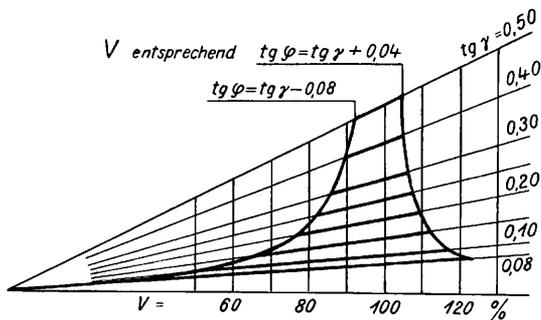


Abb. 2. Grenzen der zulässigen Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Querneigung des Gleises.

Während die Hauptbahnen  $\text{tg } \gamma \sim 0,08$  oder  $h \sim 120$  mm als obere Grenze haben, können Stadtschnellbahnen vielleicht noch mit  $\text{tg } \gamma \sim 0,16$  oder  $h \sim 240$  mm angelegt werden ( $h$  ist senkrecht zur Verbindungslinie der Schienenoberkanten zu messen). Dabei wird

5) . . . . .  $V^2 \sim 20 r$   
 km/h m

Der richtige Halbmesser ( $\text{tg } \varphi = \text{tg } \gamma$ ) ergibt sich somit für  $V = 50 \text{ } 100 \text{ km/h}$

6) . . bei  $\text{tg } \gamma = 0,08$  oder  $h = 120$  mm zu  $r = 250 \text{ } 1000$  m

0,12	180	165	660
0,16	240	125	500

Allerdings sind derartige Querneigungen  $\gamma$  des Gleises nur unter der Voraussetzung möglich, daß die Neigungs der Überhöhungsrampe der äußeren Schiene zwischen Gerade und Kreisbogen nicht zu steil wird.

Die Oberbauvorschriften der Reichsbahn fordern eine Länge der Überhöhungsrampe l.

7) . . bei  $V \geq 80 \text{ km/h}$   $l \geq 1000 h$  oder  $s \leq 1 : 1000$   
 $= 80-50 \quad \geq 600 h \quad \leq 1 : 600$   
 $< 50 \quad \geq 400 h \quad \leq 1 : 400$

Diese Rampenneigungen  $s$  könnten wohl bei einer besseren Gestaltung der Übergangsbogen als der heutigen etwas steiler genommen werden. Maßgebend für die Festsetzung der Rampenneigung ist einmal die Drehbeschleunigung des Fahrzeugs um die waagerechte Querachse am Anfang und am Ende der Rampe. Diese kann durch einen geschwungenen Verlauf der Rampe erheblich verkleinert werden. Innerhalb der Überhöhungsrampe bilden die Schienen des äußeren und des inneren Stranges eine windschiefe Fläche, auf der die Räder des Fahrzeugs stehen. Maßgebend ist also andererseits die zulässige Verdrückung der Federung zwischen Rad und

Wagenkasten und das zulässige Verdrehungsmoment, das der Wagenkasten aushalten kann. Je länger das Fahrzeug, um so flacher muß die Rampe sein.

Die Drehbeschleunigung, die die Lokomotive im Übergangsbogen um ihre senkrechte Achse erfährt, soll im letzten Abschnitt erörtert werden.

Die notwendige Übergangslänge ist bei den Reichsbahnvorschriften aus der zugelassenen Rampenneigung abgeleitet.

Ein anderer Weg zur Bestimmung der notwendigen Übergangslänge ergab sich aus Versuchen, die vor dem Bau der Schwebbahn Barmen—Elberfeld—Vohwinkel durchgeführt wurden<sup>4)</sup>.

Beide Wege führen zu ähnlichen Ergebnissen.

Abb. 3 zeigt den Schwebebahnwagen in der Geraden, Abb. 4 im Kreisbogen.

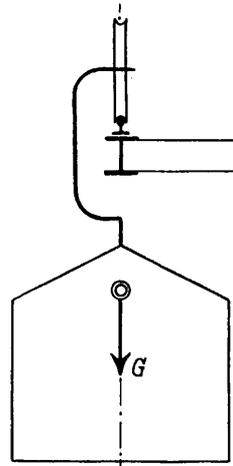


Abb. 3. Schwebebahnwagen in der Geraden.

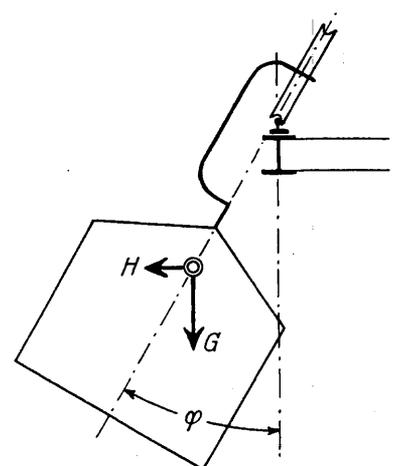


Abb. 4. Schwebebahnwagen im Bogen.

Unter dem Einfluß der Fliehkraft H hängt der Wagen schief unter dem Winkel  $\varphi$ .

Abb. 5 zeigt einen Kreisbogen, der ohne Übergangsbögen zwei Gerade verbindet.

Abb. 6 zeigt das Krümmungsbild dieses Gleises.

Ein Schwebebahnwagen, der von links nach rechts über dieses Gleis fährt, erhält am Bogenanfang BA plötzlich eine Drehung seiner Gleichgewichtslage um

1) . . . . .  $\text{tg } \varphi = \frac{V^2}{127 r}$ .

Die Folge ist eine Schwingung des Wagenschwerpunktes um den doppelten Winkel.

Abb. 7 zeigt im Grundriß in der punktierten Linie den Weg des Wagenschwerpunktes, während die ausgezogene Linie die gedrehte Gleichgewichtslage des Wagenschwerpunktes darstellt.

Bei gegebener Höchstgeschwindigkeit ist die halbe Schwingungsweite proportional der Krümmung des Kreisbogens

$\text{tg } \varphi \sim \frac{1}{r}$ .

Wird nun zwischen Gerade und Kreisbogen ein Übergangsbogen der üblichen Art

<sup>4)</sup> Petersen, Die Gestaltung der Bogen im Eisenbahngleis. Berlin 1920. Kreidels Verlag. Erweiterter Sonderdruck aus Org. Fortschr. Eisenbahnwes. 1920. Heft 5 und 6. — Derselbe, Über die Grenzen, welche der Fahrgeschwindigkeit auf Eisenbahnen durch die Fliehkraft in den Bahnkrümmungen gesetzt werden. Org. Fortschr. Eisenbahnwes. 1900. Heft 7 und 8.

8) . . . . .  $y = \frac{x^3}{6lr}$

eingeschaltet (Abb. 8), so entsteht ein Krümmungsbild nach Abb. 9, und es wird

9) . . . . .  $\frac{1}{\rho} = \frac{x}{l} \cdot \frac{1}{r}$

vorausgesetzt, daß  $\frac{1}{r}$  eine gewisse Größe nicht überschreitet.

(Hierüber später.)

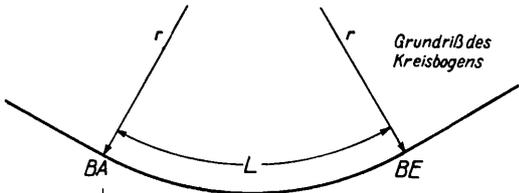


Abb. 5.

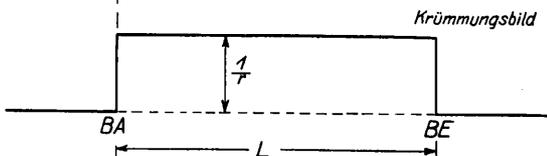


Abb. 6.

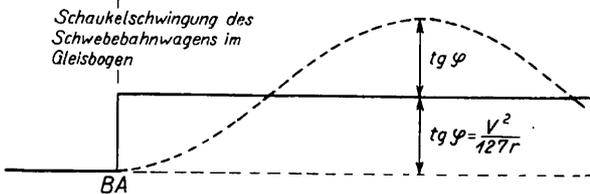


Abb. 7.

Abb. 5 bis 7. Gleisbogen ohne Übergangsbögen.

Wenn nun ein Schwebewagen durch diesen Übergangsbogen (Abb. 8 und 9) fährt, so dreht sich die Gleichgewichtslage des Wagenschwerpunktes entsprechend der  $\frac{1}{\rho}$  Linie in Abb. 9.

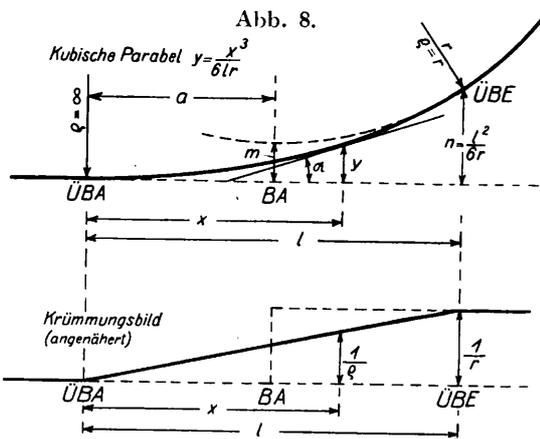


Abb. 9.

Abb. 8 und 9. Die kubische Parabel als Übergangsbogen für kleine Winkel  $\alpha$  der Endtangente.

Um diese sich gleichmäßig drehende Gleichgewichtslage macht der Schwebewagen eine Pendelschwingung nach Abb. 10 bis 12.

Die geschwungenen punktierten Linien in Abb. 10 bis 12 stellen den Weg des Wagenschwerpunktes im Grundriß

dar, während die ausgezogenen Linien den Weg der Gleichgewichtslage des Wagenschwerpunktes bezeichnen.

Die waagerechten Längen in Abb. 10 bis 12 bedeuten Zeiten und zwar ist  $T = \frac{l}{v}$  = der Fahrzeit für die Länge des Übergangsbogens und  $2t$  = der Dauer einer doppelten Pendelschwingung des Wagens.

Für  $T = 2t$  entsteht Abb. 10.

Der von links nach rechts fahrende Schwebewagen hängt in der Geraden senkrecht. Nachdem der Anfang des Übergangsbogens ÜBA überfahren ist, dreht sich die Gleichgewichtslage gleichmäßig weg. Der Wagenschwerpunkt bleibt im Übergangsbogen zunächst hinter der sich drehenden Gleichgewichtslage zurück. Entsprechend dem Abstand zwischen der wirklichen Schwerpunktlage und der Gleichgewichtslage wirkt eine seitlich beschleunigende Kraft auf

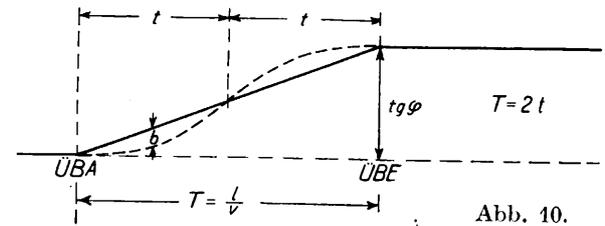


Abb. 10.

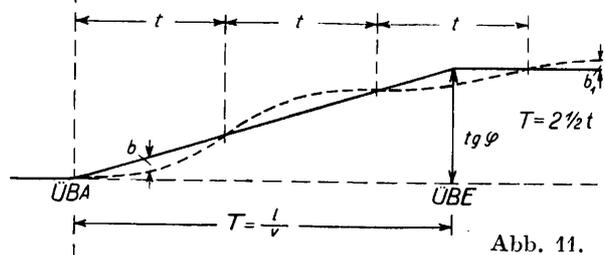


Abb. 11.

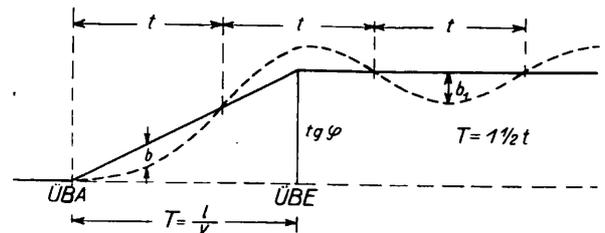


Abb. 12.

Abb. 10 bis 12. Schaukelschwingungen des Schwebewagens im Übergangsbogen.

den Wagenschwerpunkt, die Geschwindigkeit seiner Querbewegung nimmt zu. In der Mitte des Übergangsbogens schwingt der Wagenschwerpunkt durch die Gleichgewichtslage hindurch. Nun wird die beschleunigende Kraft negativ, am Ende des Übergangsbogens wird die Beschleunigung und die Geschwindigkeit der Querschwingung gleich Null. Der Wagen fährt in dem anschließenden Kreisbogen ohne Schaukelschwingung weiter.

Die größte Pendelweite  $b$  im Übergangsbogen ist rund

$$b \sim \frac{1}{8} \text{tg } \varphi.$$

Abb. 11 zeigt die Fahrt durch den Übergangsbogen bei  $T = 2\frac{1}{2} t$ .

Die Pendelweite  $b$  im Übergangsbogen ist rund

$$b \sim \frac{1}{10} \text{tg } \varphi.$$

Am Ende des Übergangsbogens, beim Eintritt in den Kreisbogen dreht sich die Gleichgewichtslage dem schwingenden Wagen entgegen, und die beschleunigende Kraft wird kleiner.

Die Pendelweite des im Kreisbogen weiter schaukelnden Wagens  $b_1$  wird daher merklich kleiner als  $b$ , also

$$b_1 < \frac{1}{10} \operatorname{tg} \varphi.$$

Abb. 11 zeigt den ungünstigsten Fall, der eintreten kann, wenn  $T > 2 t$ .

Abb. 12 zeigt die Fahrt durch den Übergangsbogen bei  $T = 1\frac{1}{2} t$ .

Hierbei wird die Pendelweite innerhalb des Übergangsbogens

$$b \sim \frac{1}{6} \operatorname{tg} \varphi.$$

Am Ende des Übergangsbogens beim Eintritt in den Kreisbogen dreht sich die Gleichgewichtslage vom schwingenden Wagen ab. Die beschleunigende Kraft wird größer und die Pendelweite des im Kreisbogen weiter schaukelnden Wagens  $b_1$  wird erheblich größer als  $b$ , also

$$b_1 > \frac{1}{6} \operatorname{tg} \varphi.$$

Wird  $T < 1\frac{1}{2} t$ , so wird  $b_1$  noch größer.

Die Schwebbahnversuche hatten das Ergebnis, daß bis zu einer bestimmten Fahrgeschwindigkeit die Fahrt im anschließenden Kreisbogen praktisch schaukelfrei war, daß aber bei Überschreitung dieser Geschwindigkeit heftige Schaukelschwingungen auftraten. Die zulässige Grenzgeschwindigkeit lag etwas oberhalb des in Abb. 10 dargestellten Falles. Bei Abb. 11 waren die verbleibenden Schwingungen so klein, daß sie von den Insassen des Wagens nicht mehr unangenehm empfunden wurden und erst bei größerem  $\operatorname{tg} \varphi$  überhaupt bemerkt wurden.

Die Versuche wurden durchgeführt bis zu

$$\operatorname{tg} \varphi \sim 0,50 \text{ oder } V^2 \sim 63 \text{ r.}$$

Zum Vergleich mit Gl. 2) 3) 5) erfordert bei der Schwebbahn

$$10) \dots V^2 \sim 40 \text{ r} \quad \text{ein } \operatorname{tg} \varphi \sim 0,314 \\ V^2 \sim 50 \text{ r} \quad \operatorname{tg} \varphi \sim 0,40.$$

Aus diesen Versuchen ergab sich für die Schwebbahn die Folgerung: Die Mindestlänge des Übergangsbogens muß so bemessen werden, daß die Zeit zum Durchfahren des Übergangsbogens mindestens gleich der Dauer einer doppelten Pendelschwingung ist.

Ferner wurden Versuche mit verschiedener Pendeldauer gemacht. Durch Einbringen von Eisenbarren auf den Fußboden des Wagens wurde die Pendeldauer verkürzt, durch Einbringen von Eisenbarren in die Radgestelle wurde die Pendeldauer verlängert.

Dabei ergab sich, daß die Dauer einer doppelten Pendelschwingung mindestens 3 Sek. betragen mußte, wenn die Querschwingung des Wagens nicht als unangenehme Schaukelei empfunden werden sollte. Eine Pendeldauer von 1,8 Sek. für die Doppelschwingung wurde beispielsweise als ruckartig, demnach als zu kurz empfunden.

Diese Gesichtspunkte sind maßgebend gewesen beim Bau der Elberfelder Schwebbahn und haben sich dort gut bewährt.

An einigen Stellen der Elberfelder Bahn treten zwar merkliche Schaukelschwingungen auf. Das liegt daran, daß die Lage des Gleises nicht richtig ist, weil die Eisenkonstruktion an diesen Stellen nicht genau genug ausgeführt wurde. Man hatte anfangs beim Bau nicht genügend darauf geachtet. Die verbliebenen Mängel sind immerhin so klein, daß man deswegen einen Umbau der fehlerhaften Eisenkonstruktion nicht für erforderlich gehalten hat.

Wichtig sind nun die Folgerungen für die gewöhnliche Eisenbahn. Bei der Schwebbahn folgt der Wagen der sich drehenden Gleichgewichtslage mit einer Pendelschwingung,

also in der weichsten Form, die überhaupt möglich ist. Immerhin sind dafür 3 Sek. nötig, damit die Bewegung für die Fahrgäste nicht zu hart wird. Bei der gewöhnlichen Eisenbahn erfährt der Wagen im Übergangsbogen ebenfalls eine Drehung seiner Gleichgewichtslage. Hier ist aber die Bewegung keine freie Pendelschwingung, sondern eine erzwungene. Die Beschleunigung der Drehung ist daher härter. Man kann sie nur abmildern durch Verlängerung der Fahrzeit für die Fahrt durch den Übergangsbogen. Schlägt man rund 20% an Fahrzeit zu, so ergibt sich für die gewöhnliche Eisenbahn als erforderlich eine Fahrzeit  $T \geq 3,6$  Sek. und daraus die Bedingung, daß die Länge des Übergangsbogens in Meter mindestens gleich der Fahrgeschwindigkeit in km/h sein muß

$$11) \dots \dots \dots 1 \geq V \\ \text{m km/h.}$$

Nun sind bei den bestehenden Bahnen die Übergangsbogen meistens mit 30 bis 40 m Länge angelegt. Das unbefriedigende Fahren unserer Züge durch die Übergangsbögen ist also schon aus ihrer ungenügenden Länge zu erklären. Eine Verlängerung ist nicht ohne weiteres möglich, da sie eine Vergrößerung des Maßes  $m$  (Abb. 8) erfordert, um das der Kreisbogen gegen die Anfangsgerade seitlich versetzt ist. Immerhin erlaubt das Schrammsche Verfahren eine nicht unbedeutende Verbesserung. (Hierüber später.)

Nun ist der gradlinige Verlauf der  $\frac{1}{\rho}$  Krümmung im Übergangsbogen nach Abb. 9 bis 12 keinesfalls eine gute Lösung. Man hat das bisher nur deswegen so gemacht, weil man es nicht besser machen konnte.

Wenn man dagegen den Verlauf der  $\frac{1}{\rho}$  Krümmung nicht gradlinig sondern entsprechend Abb. 10 nach einer geschwungenen Linie ähnlich dem Pendelschwing des Schwebbahnwagens gestalten könnte, so wäre das eine gewaltige Verbesserung, zunächst zweifellos für die Schwebbahn, weil dadurch die Pendelweite der im Kreisbogen verbleibenden Schaukelschwingung, das Maß  $b_1$  in Abb. 11 beträchtlich weiter verkleinert würde. Für die gewöhnliche Eisenbahn wäre der Gewinn zweifellos noch größer, weil sich nunmehr die erzwungene Drehung des Wagens viel besser dem weichen Pendelschwing des Schwebbahnwagens anpassen würde, und weil die plötzlichen senkrechten Beschleunigungen am Anfang und Ende der Überhöhungsrampe fortfallen würden.

Alles, was früher zu diesem Zweck vorgeschlagen worden ist, war unvollkommen und führte zu Gleichungen, die so verwickelt wurden, daß sie praktisch nicht zu brauchen waren.

Eine einfache Lösung dieser Aufgabe wurde von Schramm gefunden.

### II. Die kubische Parabel als Übergangsbogen.

Zunächst soll erläutert werden, weshalb die kubische Parabel als Übergangsbogen nur bedingt zu gebrauchen ist.

Wenn man einen Verlauf der Krümmungslinie  $\frac{1}{\rho}$  gradlinig nach Abb. 9 wünscht, so lautet die Bedingung

$$9) \dots \dots \dots \frac{1}{\rho} = \frac{x}{1} \cdot \frac{1}{r},$$

ferner aber ist

$$12) \dots \dots \dots \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{d x^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{d y}{d x} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Wenn man nun als Annäherung  $\frac{d y}{d x} = 0$  setzt, so wird

die Bedingungsgleichung für den Übergangsbogen

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x}{l} \cdot \frac{1}{r}$$

Diese Gleichung zweimal integriert, ergibt die bekannte Gleichung für den Übergangsbogen

8) . . . . .  $y = \frac{x^3}{6lr}$

die bisher allgemein gebraucht wurde.

Abb. 13 zeigt eine kubische Parabel, Abb. 14 die zugehörige wirkliche Krümmungslinie  $\frac{1}{\rho}$ . Diese ist nur im Anfang angenähert gerade, weicht dann immer weiter von der Geraden ab. Der Höhenunterschied zwischen der Geraden  $\frac{1}{r}$  und der geschwungenen  $\frac{1}{\rho}$  Linie zeigt den Einfluß des  $\frac{dy}{dx}$ .

Es empfiehlt sich, die Werte  $\frac{1}{\rho}$  nicht auf die Abszissen  $x$ , sondern auf  $\text{tg } \alpha$  zu beziehen ( $\alpha =$  Winkel der Tangente), da alle kubischen Parabeln mit gleichem  $\alpha$  einander ähnlich sind. In Abb. 14 sind die Abszissen  $x$  proportional den Werten  $\sqrt{\text{tg } \alpha}$ .

Nach Abb. 8 sind für die Absteckung wichtig die Maße  $a$  und  $m$ . Bei der üblichen Näherungsrechnung ist  
13) . . . . .  $a = 0,5l$  und  $m = 0,25n$ .

Die Fehler dieser Annahmen ergeben sich aus Tafel I (vergl. Abb. 8, 9, 13, 14).

Tafel I.

$\text{tg } \alpha$	$\alpha$	$\mu = \frac{r}{\rho}$	$\frac{1}{\rho}$	$\frac{a}{l}$	$\frac{m}{n}$
0	0°	1,000	0	0,500	0,250
0,05	2° 52'	0,996	0,100	0,498	0,249
0,10	5° 43'	0,985	0,197	0,495	0,244
0,15	8° 32'	0,967	0,290	0,489	0,237
0,20	11° 19'	0,943	0,377	0,480	0,228
0,30	16° 42'	0,879	0,527	0,455	0,200
0,40	21° 48'	0,800	0,640	0,420	0,162
0,447	24° 5'	0,761	0,680	0,400	0,141

In Tafel I ist  $\rho$  der Krümmungshalbmesser am Ende des Übergangsbogens,  $r$  der Halbmesser des anschließenden Kreisbogens.

Aus Abb. 14 und Taf. I ist ersichtlich, daß die kubische Parabel nach der Näherungsformel 8) brauchbar ist bis etwa  $\text{tg } \alpha \sim 0,10$  oder  $\alpha \sim 6^\circ$ . Bei einem  $\text{tg } \alpha > 0,15$  ist es nicht mehr zulässig,  $a = 0,5l$  und  $m = 0,25n$  einzusetzen, weil dabei der tangentielle Anschluß des Übergangsbogens an den Kreisbogen verloren geht, außerdem hat der Übergangsbogen an der Anschlußstelle nicht mehr den richtigen Krümmungshalbmesser. Wie sich das auswirkt, zeigen folgende Beispiele:

Die Oberbauvorschriften der Deutschen Reichsbahn fordern für den Kreisbogen mit  $r = 300$  m eine Übergangslänge  $l = 90$  m nach der üblichen Näherungsformel. Hierbei ist  $\frac{1}{r} = 0,30$  und am Ende des Übergangsbogens  $\text{tg } \alpha = 0,15$  oder  $\alpha \sim 8\frac{1}{2}^\circ$ .

Dieser Übergangsbogen hat den Verlauf nach Abb. 15, er läuft an dem Kreisbogen vorbei. Da aber das Gleis des Übergangsbogens in das Kreisbogengleis übergeführt werden muß, so ergibt sich an der Anschlußstelle notwendigerweise eine Pfscherei.

Wenn man gar für den Kreisbogen mit  $r = 300$  m einen Übergangsbogen mit  $l = 200$  m ( $\text{tg } \alpha = 0,333$  oder  $\alpha \sim 18\frac{1}{2}^\circ$ ) nach der üblichen Näherungsformel anlegen wollte, so ergäbe

sich ein Verlauf nach Abb. 16, mit dem man überhaupt nichts mehr anfangen kann.

Wohl kann man die kubische Parabel als Übergangsbogen bis zum Winkel  $\alpha \sim 24^\circ$  oder  $\text{tg } \alpha = 0,447$  gebrauchen,

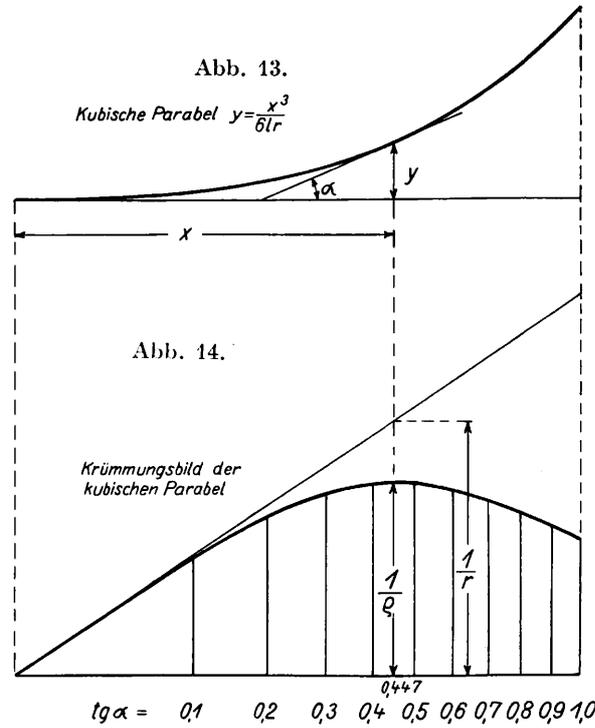


Abb. 13 und 14. Wirklicher Krümmungsverlauf in der kubischen Parabel.

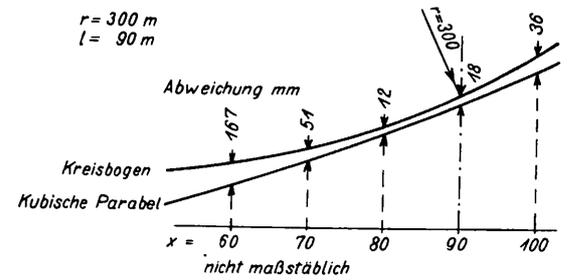


Abb. 15.

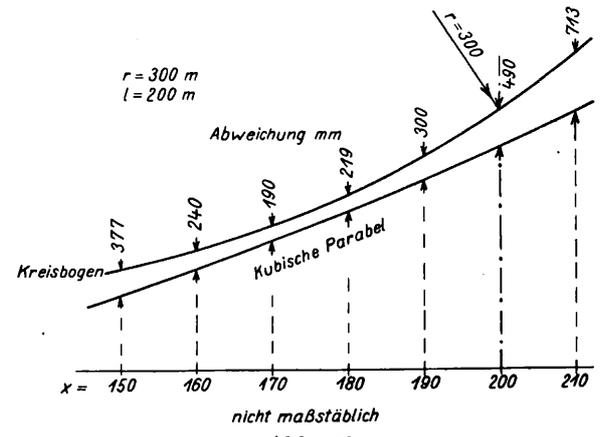


Abb. 16.

Abb. 15 und 16. Fehler der kubischen Parabel als Übergangsbogen. (Näherungsrechnung.)

aber, wenn  $\alpha > 6^\circ$  wird, darf man nicht mehr die übliche Näherungsformel benutzen. Es hat jedoch keinen Zweck, hierauf näher einzugehen, da auch diese Berechnungsweise (vergl. Fußnote 4) durch das Verfahren Schramm überholt ist.

Wollte man aber den Krümmungsverlauf nach Abb 9 wirklich gradlinig gestalten, so käme man zu folgenden Gleichungen:

$$14) \quad y = \frac{x^3}{6lr} \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{l^2 r^2} \cdot x^4 + \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{l^4 r^4} \cdot x^8 + \frac{15}{48} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{1}{128} \cdot \frac{1}{l^6 r^6} \cdot x^{12} + \dots \right]$$

für  $x=1$  wird:

$$15) \quad y = n = \frac{l^2}{6r} \left[ 1 + 0,0535 \left(\frac{1}{r}\right)^2 + 0,0064 \left(\frac{1}{r}\right)^4 + 0,000977 \left(\frac{1}{r}\right)^6 + \dots \right]$$

$$16) \quad \frac{dy}{dx} = \text{tg } \alpha = \frac{1}{2r} \left[ 1 + 0,125 \left(\frac{1}{r}\right)^2 + 0,0235 \left(\frac{1}{r}\right)^4 + 0,00488 \left(\frac{1}{r}\right)^6 + \dots \right]$$

$$17) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{r} \left[ 1 + 0,375 \left(\frac{1}{r}\right)^2 + 0,117 \left(\frac{1}{r}\right)^4 + 0,0342 \left(\frac{1}{r}\right)^6 + \dots \right]$$

$$12) \quad \text{und } \rho = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Die Bedeutung der Zusatzglieder ergibt sich aus folgendem:

für $\frac{1}{r}$ wird	$\left(\frac{1}{r}\right)^2$	$\left(\frac{1}{r}\right)^4$	$\left(\frac{1}{r}\right)^6$
	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{1000000}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

für  $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{10}$  genügt daher zweifellos das erste Glied:

$$y = \frac{x^3}{6lr}$$

für  $\frac{1}{r} \sim 1$  müßten schon drei Zusatzglieder berücksichtigt werden,

für  $\frac{1}{r} \sim 2$  werden auch diese Formeln unbrauchbar.

Die verwickelte Form der Gl. 14) bis 17) macht sie für den täglichen Gebrauch ungeeignet.

Wenn aber schon die Gleichungen für den gradlinigen Verlauf der Krümmungslinie nach Abb. 9 so umständlich werden, so kann man sich vorstellen, daß entsprechende Gleichungen für einen geschwungenen Verlauf der Krümmungslinie nach Abb. 10 sich in brauchbarer Form überhaupt nicht mehr darstellen lassen.

Die Gestaltung der Krümmungslinie nach der geschwungenen Linie in Abb. 10 war bisher ein unerreichbares Ideal.

Die Aufgabe ist gelöst von Schramm.

### III. Der vollkommene Gleisbogen.

Schramms Vorgänger sind Nalenz und Höfer.

Nalenz hatte ein zeichnerisches Verfahren entwickelt, mit dem er die Querverschiebungen ermittelte, die ein schlecht liegendes Gleis erfahren mußte, um den richtigen Krümmungsverlauf zu erhalten. Nalenz nahm die Lage des Gleises durch einander übergreifende Pfeilhöhenmessungen auf und trug diese Messungen hintereinander auf. Den unregelmäßigen Verlauf der dargestellten Gleislinie glich er sodann durch einen schlanken Linienzug aus. Die Höhenunterschiede dieser beiden Linien summiert, ergaben die notwendigen Querverschiebungen. Die theoretische Begründung des Verfahrens war allerdings schwer verständlich und noch nicht einwandfrei.

Höfer hat dieses Verfahren mathematisch mit Evolventenunterschieden begründet und in hervorragender Weise für den praktischen Gebrauch weiter ausgearbeitet. Sein Verfahren wird von der Reichsbahn bereits mit großem Erfolg benutzt, um schlecht liegende Gleise mit dem geringsten Arbeitsaufwand in eine befriedigende Lage zu bringen.

Schramm gibt nun für das Nalenz-Höfer-Verfahren eine neue, sehr elegante mathematische Begründung, die seinen Anwendungsbereich beträchtlich erweitert und besonders für den Neubau von Gleisen auch die analytische Behandlung der Aufgabe in einfacher Form ermöglicht.

Der grundlegende Gedankengang ist folgender:

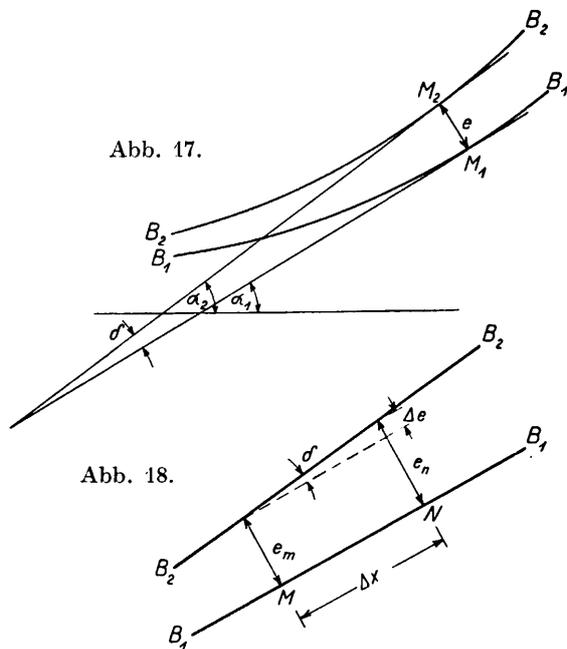


Abb. 17 und 18. B<sub>1</sub> = vorhandener Gleisbogen oder angenommener Gleisbogen mit einfachem Krümmungsverlauf.  
B<sub>2</sub> = verbesserter Bogen mit richtigem Krümmungsverlauf.

In Abb. 17 ist B<sub>1</sub> entweder ein vorhandener Gleisbogen oder ein leicht abzusteckender Bogen mit einfachem Krümmungsverlauf, beispielsweise ein Kreisbogen, der unmittelbar an die Anfangsgerade anschließt. B<sub>2</sub> ist der verbesserte Bogen mit dem gewünschten Krümmungsverlauf.

An der Stelle M haben die beiden Bogen den Abstand e. Die Tangente an den Bogen B<sub>1</sub> in M<sub>1</sub> habe den Winkel alpha<sub>1</sub>, gegen irgendeine Gerade, beispielsweise die Anfangsgerade des Bogens B<sub>1</sub>.

Die Tangente an den Bogen B<sub>2</sub> in M<sub>2</sub> habe den Winkel alpha<sub>2</sub> gegen die gleiche Gerade.

Der Winkel zwischen den beiden Tangenten soll mit delta bezeichnet werden. Somit ist

$$18) \quad \delta = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Abb. 18 zeigt ein kleines Stück beider Bögen.

In M ist der Abstand beider Bögen =  $e_m$

in N ist der Abstand beider Bögen =  $e_n$

dann ist

19) . . . . .  $e_n = e_m + \Delta e$

und

20) . . . . .  $\Delta e = \Delta x \cdot \delta$ .

Also kann man e bestimmen aus der Gleichung

21) . . . . .  $e = \Sigma \Delta x \cdot \delta$ .

Diese Gleichung bildet die Grundlage für die zeichnerische Lösung oder in der Form

22) . . . . .  $e = \int \delta \cdot dx$

für die analytische Lösung.

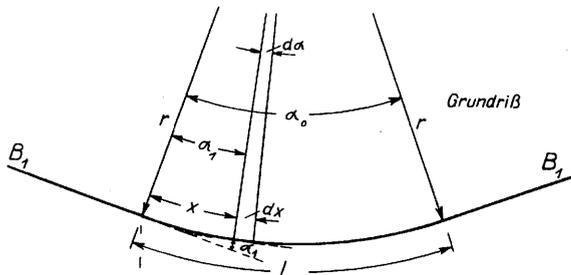


Abb. 19.

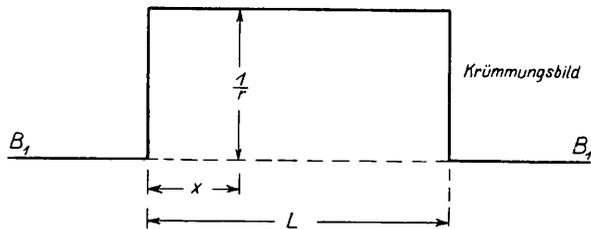


Abb. 20.

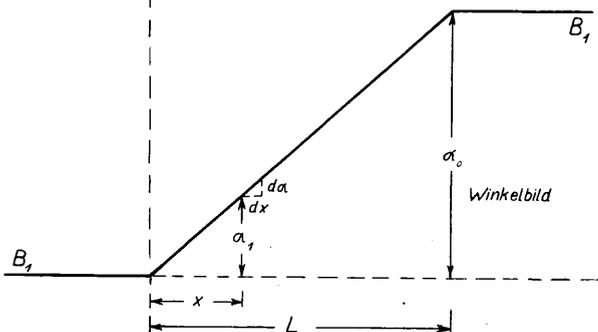


Abb. 21.

Abb. 19 bis 21. Gleisbogen ohne Übergangsbögen.

Voraussetzung für die Gültigkeit des Verfahrens ist, daß  $\tan \delta = \delta$  gesetzt werden kann ( $\delta$  etwa bis  $5^\circ$ , hierüber später), und daß die Bogenlängen  $B_1$  und  $B_2$  sich nur wenig unterscheiden. Werden die Abstände  $e$  zu groß, muß man einen besser passenden Bogen  $B_1$  nehmen.

Die Werte  $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$  findet Schramm nun durch ein Abbildungsverfahren, bei dem der Kreisbogen durch eine Gerade dargestellt wird.

Abb. 19 zeigt einen Bogen  $B_1$  bestehend aus Gerade, Kreisbogen, Gerade im Grundriß.

Abb. 20 zeigt das zugehörige Krümmungsbild.

Abb. 21 zeigt die Abbildung des Bogens  $B_1$  aus Abb. 19. Schramm nennt sie das Winkelbild des Bogens  $B_1$ .

Abb. 21 entsteht aus Abb. 19, wenn man die Bogenlängen  $x$  als Abszissen, die zugehörigen Tangentialwinkel oder Zentriwinkel  $\alpha$ , als Ordinaten aufträgt.

Nach Abb. 19 ist:

23) . . . . .  $dx = r \cdot d\alpha$ .

Nach Abb. 21 ist:

24) . . . . .  $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\alpha}{r \cdot d\alpha} = \frac{1}{r}$ .

Also wird der Kreisbogen der Abb. 19 in Abb. 21 als Gerade dargestellt, deren Neigung gegen die Waagerechte der Krümmung  $\frac{1}{r}$  entspricht.

Ferner ist aber

23) . . . . .  $d\alpha = \frac{1}{r} dx$

oder

25) . . . . .  $\alpha = \int \frac{1}{r} dx$ .

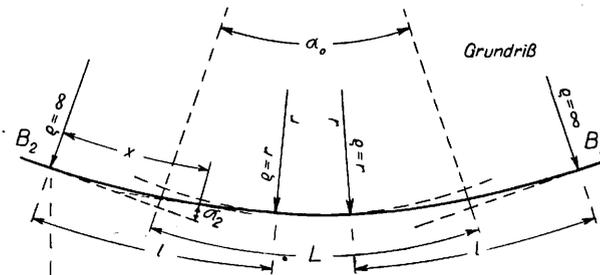


Abb. 22.

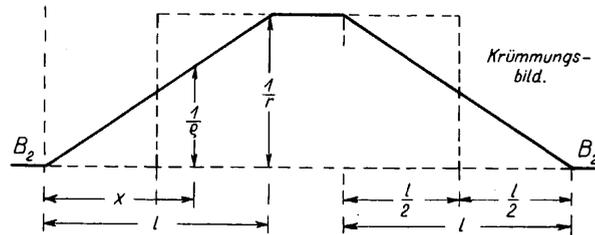


Abb. 23.

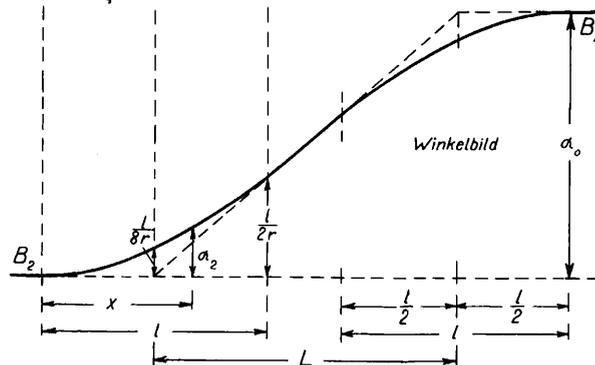


Abb. 24.

Abb. 22 bis 24. Gleisbogen mit geradem Krümmungsverlauf in den Übergangsbögen.

Das heißt: das Winkelbild ist die Integralkurve des Krümmungsbildes. In Abb. 21 ist die Ordinate  $\alpha_1$ , im Abstand  $x$  gleich dem Flächeninhalt  $\frac{1}{r} \cdot x$  des Krümmungsbildes (Abb. 20).

In ähnlicher Weise zeigt Abb. 22 einen Bogen  $B_2$ , bestehend aus Gerade, Übergangsbogen, Kreisbogen, Übergangsbogen, Gerade mit dem gleichen Zentriwinkel,  $\alpha_0$  und dem gleichen Halbmesser  $r$  im Grundriß.

Abb. 23 zeigt das zugehörige Krümmungsbild bei gradem Krümmungsverlauf  $\frac{1}{r}$ .

Abb. 24 zeigt die Abbildung des Bogens  $B_2$  aus Abb. 22, das sogenannte Winkelbild des Bogens  $B_2$ . Abb. 24 entsteht aus Abb. 22, wenn man die Bogenlängen  $x$  als Abszissen, die Winkel  $\alpha_2$  der zugehörigen Tangenten als Ordinaten aufträgt.

Zeichnet man nun Abb. 24 und Abb. 21 übereinander, so ist in Abb. 25 der geschwungene Linienzug das Winkelbild des Bogens  $B_2$ , der gebrochene gradlinige Zug das Winkelbild des Bogens  $B_1$ .

Der Höhenunterschied zwischen  $B_2$  und  $B_1$  in Abb. 25 ist nach Gl. 18)

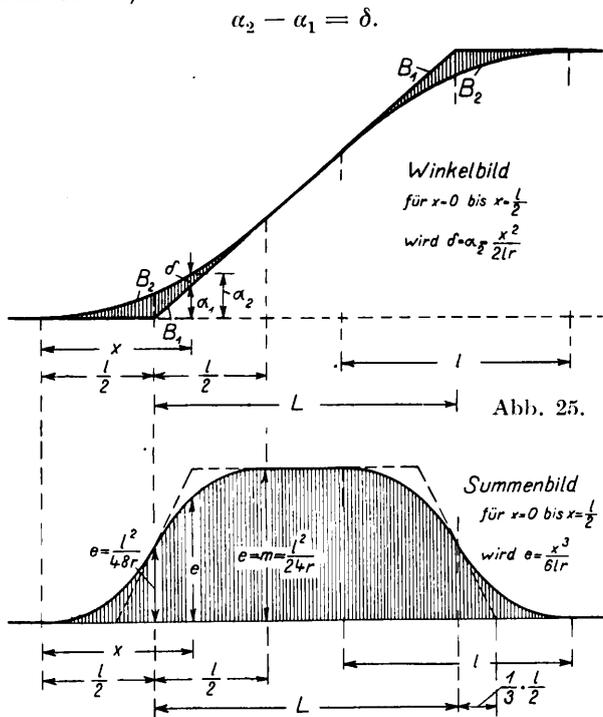


Abb. 26.

Abb. 25 und 26. Gleisbogen mit gradem Krümmungsverlauf in den Übergangsbögen.

Nach Gl. 22) ist aber der Abstand  $e$  zwischen den Bogen  $B_1$  und  $B_2$

$$e = \int \delta \cdot dx.$$

Also ist der Flächeninhalt der  $\delta$ -Fläche in Abb. 25 von 0 bis  $x$  gleich dem Abstand  $e$ , den der Bogen  $B_2$  an der Stelle  $x$  vom Bogen  $B_1$  hat.

Durch Integration der  $\delta$ -Fläche der Abb. 25 ergibt sich das Summenbild, Abb. 26, dessen Ordinaten die Querverschiebungen  $e$  bedeuten, die der Bogen  $B_1$  erfahren muß, damit der Bogen  $B_2$  den gewünschten Krümmungsverlauf erhält.

Diese Integration kann immer zeichnerisch und in besonderen Fällen auch analytisch durchgeführt werden.

Für  $x=1$  bedeutet  $e=m$  den Abstand, um den der verbleibende Kreisbogen  $B_2$  (hinter  $x=1$ ) gegen den Kreisbogen  $B_1$  versetzt wird. Hat der Kreisbogen  $B_1$  den Halbmesser  $r$ , so erhält der verbleibende Kreisbogen  $B_2$  den Halbmesser  $r - m$ .

Analytisch ergibt sich eine einfache Lösung für die erste Hälfte des Übergangsbogens von  $x=0$  bis  $x=\frac{1}{2}$ , in der der Bogen  $B_1$  eine Gerade und  $\alpha_1=0$  ist, in der also  $\delta = \alpha_2$  wird.

Ist nach Abb. 23 die Krümmungslinie im Übergangsbogen gradlinig, also

$$9) \dots \dots \dots \frac{1}{\rho} = \frac{x}{l} \cdot \frac{1}{r}.$$

so ist im Winkelbild (Abb. 24)

$$26) \dots \dots \dots \alpha_2 = \int \frac{1}{\rho} \cdot dx = \frac{x^2}{2lr}$$

für  $x=0$  bis  $x=\frac{1}{2}$  wächst somit  $\delta = \alpha_2$  nach einer Parabel.

Nach Abb. 25 wird sodann für  $x=0$  bis  $x=\frac{1}{2}$

$$27) \dots \dots \dots e = \int \delta \cdot dx = \frac{x^3}{6lr}$$

nach der bekannten kubischen Parabel.

Für  $x=\frac{1}{2}$  wird

$$28) \dots \dots \dots e = \frac{l^2}{48r}.$$

Die zweite Hälfte des Übergangsbogens von  $x=\frac{1}{2}$  bis  $x=1$  ist der ersten symmetrisch insofern, als in Abb. 25 die Werte  $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$  für  $x=\frac{1}{2}$  bis  $x=1$  den Werten  $\delta = \alpha_2$  für  $x=0$  bis  $x=\frac{1}{2}$  symmetrisch gleich sind.

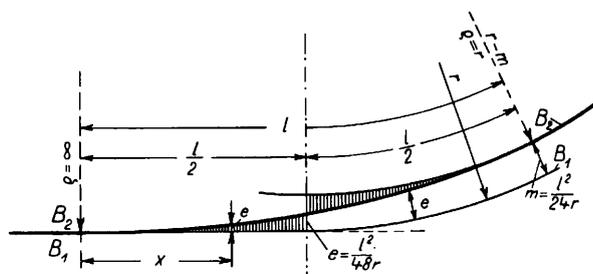


Abb. 27. Übergangsbogen mit gradem Krümmungsverlauf.  
Für  $x=0$  bis  $x=\frac{1}{2}$  wird  $e = \frac{x^3}{6lr}$ .

Also ist auch in dem Summenbild (Abb. 26) der Verlauf der  $e$ -Linie symmetrisch zur Mitte des Übergangsbogens und für  $x=1$  wird  $e=m$  doppelt so groß als für  $x=\frac{1}{2}$ .

Für  $x=1$  wird

$$29) \dots \dots \dots m = \frac{l^2}{24r}.$$

Der Übergangsbogen mit geradem Krümmungsverlauf ist dargestellt in Abb. 27.

Der Bogen  $B_1$ , bestehend aus der Anfangsgraden (bis  $x=\frac{1}{2}$ ) und dem anschließenden Kreisbogen mit dem Halbmesser  $r$ , muß um das Maß  $e$  seitlich verschoben werden, um den richtigen Bogen  $B_2$  mit dem geradlinigen Krümmungsverlauf im Übergangsbogen zu erhalten. Für die linke Hälfte des Übergangsbogens  $x=0$  bis  $x=\frac{1}{2}$  sind die Werte  $e$  Ordinaten einer kubischen Parabel über der Anfangsgraden, die sich aus der Endordinate  $e = \frac{l^2}{48r}$  für  $x=\frac{1}{2}$  leicht berechnen lassen.

In der rechten Hälfte des Übergangsbogens von  $x=\frac{1}{2}$  bis  $x=1$  (gemessen als Bogenlängen) sind die schraffierten Ordinaten  $m - e$  (Abb. 27) symmetrisch gleich den Ordinaten  $e$  der linken Hälfte. In der rechten Hälfte sind die Werte  $e$  vom Kreisbogen  $B_1$  und nicht von der Anfangsgraden abzusetzen.

Der Winkel  $\alpha_2$  der Tangente am Ende des Übergangsbogens ergibt sich aus Abb. 24. Er ist gleich der zugehörigen Fläche des Krümmungsbildes (Abb. 23).

30) . . . . für  $x = \frac{1}{2}$  wird  $\alpha_2 = \frac{1}{8r}$

31) . . . .  $x = 1$   $\alpha_2 = \frac{1}{2r}$ .

Der Winkel der Tangente am Ende des Übergangsbogens ist also viermal so groß als der Winkel der Tangente in der Mitte des Übergangsbogens. Für diesen letzteren, dem das größte  $\delta$  (Abb. 25) entspricht, gilt die Voraussetzung, daß  $\delta$  und  $tg \delta$  noch miteinander vertauscht werden können.

Nimmt man für  $x = \frac{1}{2}$  etwa  $\delta_{max} \sim 5^0 \sim 6^0$ ,  
so wird für  $x = 1$   $\alpha_{2max} \sim 20^0 \sim 24^0$ .

Man kann also auf diese Weise den Übergangsbogen mit geradem Krümmungsverlauf viel länger machen als nach der üblichen Näherungsformel.

Nun aber ist ja der gradlinige Krümmungsverlauf im Übergangsbogen nur ein Notbehelf. Er ist hier nur behandelt worden, um das Verfahren an einem Beispiel zu erläutern, dessen Ergebnis bereits bekannt ist.

Will man dagegen einen geschwungenen Verlauf der Krümmungslinie  $\frac{1}{\rho}$  entsprechend der punktierten Linie in Abb. 10, so ist die Lösung nach Schramm grundsätzlich die gleiche und ebenso einfach. Hierin liegt die große Bedeutung des Schrammschen Verfahrens.

Abb. 28 sei das Krümmungsbild des gewünschten Übergangsbogens. Die geschwungene  $\frac{1}{\rho}$ -Linie kann man genügend genau ansehen als aus zwei Parabeln bestehend, die zur Mitte symmetrisch liegen.

Für die erste Hälfte des Übergangsbogens  $x=0$  bis  $x = \frac{1}{2}$  gilt dann die Gleichung

$$\frac{1}{\rho} = C x^2,$$

für  $x = \frac{1}{2}$  wird somit

$$\frac{1}{2r} = C \frac{1^2}{4},$$

daraus ergibt sich

$$C = \frac{2}{r l^2}.$$

Die Gleichung der geschwungenen Krümmungslinie Abb. 28 lautet somit für  $x=0$  bis  $x = \frac{1}{2}$

32) . . . . .  $\frac{1}{\rho} = \frac{2}{r l^2} \cdot x^2.$

Abb. 29 zeigt das zugehörige Winkelbild. Darin wird für  $x=0$  bis  $x = \frac{1}{2}$

25) . . . . .  $\alpha_2 = \int \frac{1}{\rho} \cdot dx$

33) . . . . .  $\alpha_2 = \frac{2}{r l^2} \cdot \frac{x^3}{3} = \delta$

34) . . . . für  $x = \frac{1}{2}$  wird  $\alpha_2 = \delta_{max} = \frac{1}{12r}$ .

Am Ende des Übergangsbogens (für  $x=1$ ) wird  $\alpha_2$  gleich der Fläche des Krümmungsbildes.

35) . . . . . für  $x=1$  wird  $\alpha_2 = \frac{1}{2r}$ ,

also in diesem Falle sechsmal so groß als bei  $x = \frac{1}{2}$ .

Wenn man nun wiederum in Abb. 29 den geschwungenen Linienzug als Winkelbild des Bogens  $B_2$ , den geknickten geraden Linienzug als Winkelbild des Bogens  $B_1$  ansieht, so ist der Höhenunterschied dieser beiden Linienzüge gleich

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1$$

und die Summierung der  $\delta$ -Fläche (Abb. 29) ergibt das Summenbild (Abb. 30).

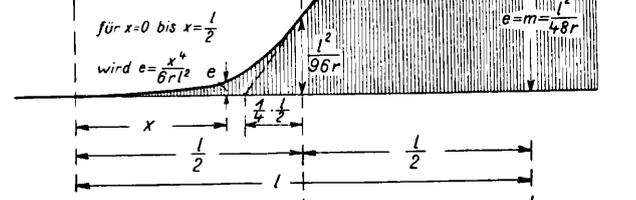
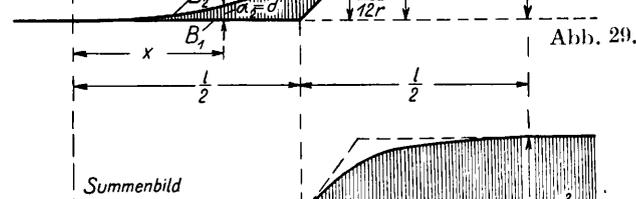
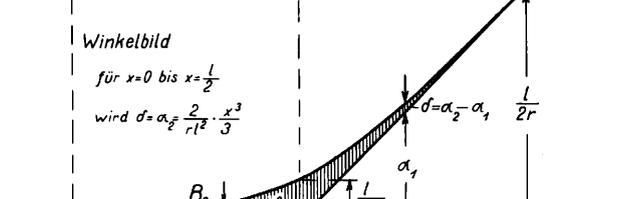
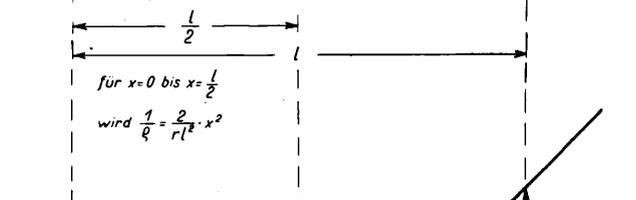
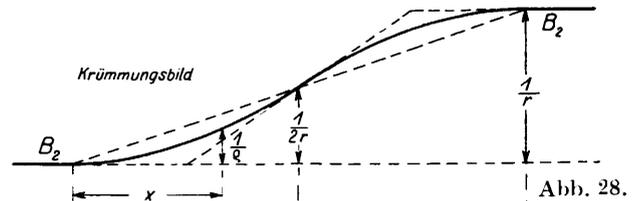


Abb. 30.

Abb. 28 bis 30. Übergangsbogen mit geschwungenem Krümmungsverlauf.

Für  $x=0$  bis  $x = \frac{1}{2}$  wird

22) . . . . .  $e = \int \delta \cdot dx$   
 $e = \frac{2}{3r l^2} \cdot \frac{x^4}{4}$

36) . . . . .  $e = \frac{x^4}{6r l^2}$

37) . . . . . für  $x = \frac{1}{2}$  wird  $e = \frac{1^2}{96r}$

38) . . . . . für  $x = 1$  wird  $e = m = \frac{1^2}{48r}$ .

Die rechte Hälfte des Übergangsbogens für  $x = \frac{1}{2}$  bis  $x=1$  ist der linken symmetrisch nach Abb. 31.

In der linken Hälfte  $x = 0$  bis  $x = \frac{1}{2}$  sind die Ordinaten  $e$  nach einer Parabel vierten Grades von der Anfangsgraden  $B_1$  abzusetzen.

Die Zwischenwerte sind leicht zu rechnen aus der Endordinate  $e = \frac{l^2}{96r}$  für  $x = \frac{1}{2}$ .

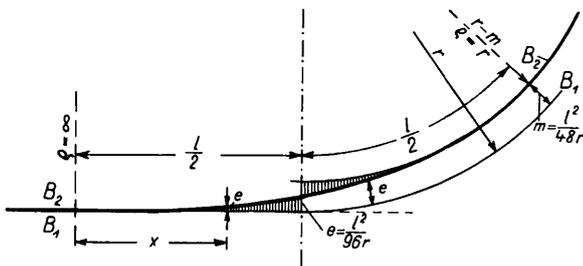


Abb. 31. Übergangsbogen mit geschwungenem Krümmungsverlauf.

Für  $x = 0$  bis  $x = \frac{1}{2}$  wird  $e = \frac{x^4}{61^2 r}$ .

In der rechten Hälfte  $x = \frac{1}{2}$  bis  $x = 1$  (als Bogenlängen gemessen) sind die Werte  $e$  vom Kreisbogen  $B_1$  abzusetzen, die schraffierten Ordinaten  $m - e$  rechts sind den schraffierten Ordinaten  $e$  links symmetrisch gleich.

Der verbleibende Kreisbogen  $B_2$  hat den Abstand  $m = \frac{l^2}{48r}$  vom Kreisbogen  $B_1$ .

$m$  ist also beim Übergangsbogen mit geschwungenem Krümmungsverlauf halb so groß wie beim Übergangsbogen mit geradem Krümmungsverlauf bei gleicher Länge beider Übergangsbögen. Bei gleichem  $m$  aber wird der Übergangsbogen mit geschwungenem Krümmungsverlauf  $\sqrt{2}$  mal so lang wie der Übergangsbogen mit geradem Krümmungsverlauf.

Wenn man also einen vorhandenen Übergangsbogen mit geradem Krümmungsverlauf ohne Querverschiebung des anschließenden Kreisbogens umbauen will, so erhält der neue Übergangsbogen nicht nur den geschwungenen besseren Krümmungsverlauf, sondern auch noch die 1,41fache Länge. Der Umbau bringt also doppelten Gewinn.

Ein Beispiel im folgenden Abschnitt zeigt, wie einfach die Rechnung bei der praktischen Anwendung wird.

**IV. Genauigkeit und Brauchbarkeit des Winkelbildverfahrens von Schramm.**

Voraussetzung für die Gültigkeit des Verfahrens war, daß  $\delta$  und  $\text{tg } \delta$  miteinander vertauscht werden können, daß also  $\delta$  ein kleiner Winkel bleiben muß.

Für die erste Hälfte des Übergangsbogens  $x = 0$  bis  $x = \frac{1}{2}$  konnte  $e$  analytisch dargestellt werden. Für diesen Bereich läßt sich daher auch der Krümmungshalbmesser  $\varrho$  des Übergangsbogens analytisch nachprüfen. Es ist:

$$12) \dots \frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{d^2 e}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{de}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \mu \frac{d^2 e}{dx^2}$$

wobei

$$\mu = \frac{1}{[1 + \text{tg}^2 \alpha_2]^{3/2}}$$

$$39) \dots \mu = \cos^3 \alpha_2.$$

Hiernach ergibt sich

Tafel II.

für $\text{tg } \alpha_2$	oder $\alpha_2$	wird $\mu$	und der Fehler von $\frac{1}{\varrho}$
0.10	5° 43'	0,985	1.5 %
0.15	8° 32'	0,967	3.3 %
0.20	11° 19'	0,943	5.7 %
0.30	16° 42'	0,879	12.1 %
0.40	21° 48'	0,800	20.0 %
0.50	26° 23'	0,719	28.1 %
1.00	45°	0,354	64.6 %

Wenn man also für  $x = \frac{1}{2}$  den Winkel der Tangente  $\alpha_2 = \delta$  hinreichend klein nimmt, ist der Fehler unbedeutend.

Bezüglich der Gestaltung der Übergangsbögen war bisher die schwierigste Aufgabe die Führung einer Stadtschnellbahn um eine rechtwinkelige Straßenecke. Will man diesen Bogen mit fortlaufend veränderlicher geschwungener Krümmung anlegen, so wird  $\alpha_0 = 90^\circ$  und  $\alpha_2 = 45^\circ$  (für  $x = 1$ ). Für  $x = \frac{1}{2}$

wird somit  $\alpha_2 = \frac{1}{6} \cdot 45^\circ = 7\frac{1}{2}^\circ$ . Dabei würde nach Taf. II der Fehler des Krümmungshalbmessers in der Mitte des Übergangsbogens rund 3%. Das kann man gewiß noch zulassen.

Im übrigen wird man wohl immer auskommen mit einem Winkel der Endtangente des Übergangsbogens  $\alpha_2 \leq 30^\circ$  für  $x = 1$ , das heißt bei  $x = \frac{1}{2}$  wird  $\alpha_2 \leq 5^\circ$ .

Der Fehler des Krümmungshalbmessers wird dabei kleiner als 1.5%. Das ist eine über Erwarten große Genauigkeit für Bögen, die bis zu einem Zentriwinkel  $\alpha_0 \sim 60^\circ$  mit fortlaufend veränderlicher geschwungener Krümmung angelegt werden können.

Unter den Bedingungen der Gleisführung war für die Länge des Übergangsbogens die Forderung aufgestellt

$$11) \dots \dots \dots l \geq V \text{ m km/h}$$

Das Verfahren Schramm erlaubt ohne Schwierigkeit, den Übergangsbogen noch länger zu machen. Aber

$$40) \dots \dots \dots l \geq V \leq 2V$$

dürfte auch den höchsten Anforderungen genügen, sofern nicht die Neigung der Überhöhungsrampe eine noch größere Länge bedingt.

Die Ausrundung von Richtungswechseln nach Abb. 32 wird man bei kleinem Zentriwinkel  $\alpha_0$  zweckmäßig mit fortlaufend veränderlicher Krümmung nach Abb. 33 aus zwei Übergangsbögen mit geschwungener Krümmungslinie  $\frac{1}{\varrho}$  gestalten. Also  $\alpha_0 = 2 \alpha_2$  (für  $x = 1$ ).

Dann ergibt sich der kleinste zulässige Halbmesser  $r$  der Ausrundung (Abb. 32) aus der Bedingung, daß

$$41) \dots \dots \dots l = l = V \text{ bis } 2V = r \cdot 2\pi \frac{\alpha_0^0}{360^0} \text{ m km/h}$$

wird. (Daneben ist die Rampenneigung zu prüfen.)

Unter den Bedingungen der Gleisführung im Bogen waren als maßgebend genannt: Die Fliehkraft, die Überhöhung, die Neigung der Überhöhungsrampe und die Drehbeschleunigung der Lokomotive um ihre senkrechte Achse.

Allgemein kann man dies wohl zusammenfassen in die Forderung, daß die Drehbeschleunigungen der Lokomotiven und Fahrzeuge um die drei Achsen, eine Parallele zur waagerechten Längsachse (Fliehkraft), die waagerechte Querachse (Rampenform) und die senkrechte Achse nicht zu groß werden dürfen.

Die Bedingungen mit Bezug auf die waagerechte Längsachse (Fliehkraft) sind im vorstehenden ausreichend erörtert.

Für die waagerechte Querachse ergibt sich die bisher übliche gerade Rampenneigung nicht als vorteilhaft, wenn auch bei der flachen Neigung die Drehbeschleunigungen am Anfang und Ende der Rampe nicht bedeutend sind.

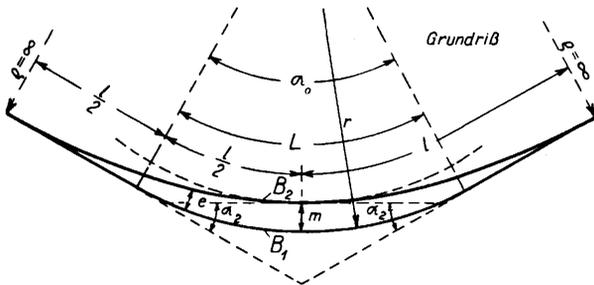


Abb. 32.

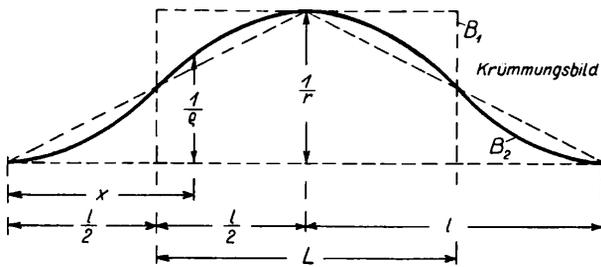


Abb. 33.

Abb. 32 und 33. Ausrundung eines Richtungswechsels mit fortlaufend veränderlicher geschwungener Krümmung.

Eine gewisse Ausrundung der Knicke an den Enden der Rampe ergibt sich ja schon von selbst beim Verlegen des Gleises. Hinsichtlich der Stoßwirkung haben die Knicke der Überhöhungsrampe geringere Bedeutung als die Knicke der Krümmungslinie. Wird aber die Rampenneigung genau so geschwungen wie die  $\frac{1}{\rho}$ -Krümmung, so wird zwar bei gleicher

Länge l die größte Rampenneigung s doppelt so groß. Dafür werden aber die Drehbeschleunigungen um die waagerechte Querachse am Anfang und Ende der Rampe so erheblich verkleinert, daß sie überhaupt nicht mehr in Betracht kommen. Man könnte deshalb die Neigung der Überhöhungsrampe in ihrem mittleren Teil wohl auf 1:400 steigern. Hat man Bedenken, dies zu tun mit Rücksicht auf die Federverdrückung und die Verdrehung des Wagenkastens, die nunmehr für die zulässige Neigung der Überhöhungsrampe allein maßgebend bleiben, so mache man den Übergangsbogen entsprechend länger, was ja heute ohne die geringste Schwierigkeit möglich ist.

Endlich ist noch die Drehbeschleunigung  $\epsilon$  der Lokomotive um ihre senkrechte Achse bei der Einfahrt in den Bogen und bei der Ausfahrt aus dem Bogen zu berücksichtigen.

Ihr entspricht ein beschleunigendes Kräftepaar M gleich Radstand a der Lokomotive mal Seitendruck S auf die Schiene.

$$42) \dots \dots \dots M = S \cdot a = J \cdot \epsilon.$$

Darin bedeutet J das polare Trägheitsmoment der Lokomotive, bezogen auf ihre senkrechte Achse. Der Seitendruck S des führenden Rades auf die Schiene darf nicht zu groß werden,

also darf die Drehbeschleunigung  $\epsilon$  nicht zu groß werden. Daher soll untersucht werden, welchen Einfluß die Länge l des Übergangsbogens auf die Drehbeschleunigung  $\epsilon$  hat.

In dem Kreisbogen Abb. 34 ist

$$ds = r \cdot d\varphi$$

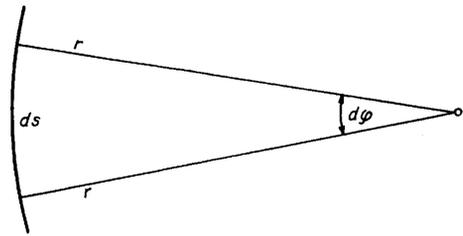


Abb. 34.

$$43) \dots \dots \dots d\varphi = \frac{1}{r} \cdot ds,$$

im Übergangsbogen ist

$$ds = \rho \cdot d\varphi$$

$$44) \dots \dots \dots d\varphi = \frac{1}{\rho} \cdot ds.$$

Also ist die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Lokomotive um ihre senkrechte Achse

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt}$$

$$45) \dots \dots \dots \omega = \frac{1}{\rho} \cdot v = \frac{1}{\text{sek}}.$$

$\omega$  ist daher bei gleichbleibender Fahrgeschwindigkeit v proportional der Krümmung  $\frac{1}{\rho}$ .

Abb. 35 zeigt das Krümmungsbild eines Bogens mit geradem Krümmungsverlauf im Übergangsbogen.

Abb. 36 zeigt das zugehörige Bild der Winkelgeschwindigkeit für konstante Fahrgeschwindigkeit. T ist die Fahrzeit

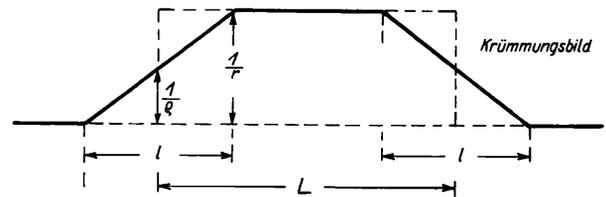


Abb. 35.

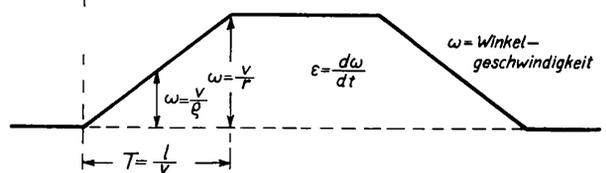


Abb. 36.

Abb. 35 und 36. Im Übergangsbogen mit gradem Krümmungsverlauf ist die größte Drehbeschleunigung der Lokomotive

$$\epsilon = \frac{1}{T} \cdot \frac{v}{r}.$$

für den Übergangsbogen. Die Drehbeschleunigung  $\epsilon$  im Übergangsbogen ist konstant entsprechend der Neigung der  $\omega$  Linie

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

$$46) \dots \dots \dots \epsilon = \frac{1}{T} \cdot \frac{v}{r} = \frac{1}{\text{sek}^2}$$

Für einen Bogen mit geschwungenem Krümmungsverlauf im Übergangsbogen zeigt Abb. 37 das Krümmungsbild und

Abb. 38 das zugehörige Bild der Winkelgeschwindigkeiten. Die größte Drehbeschleunigung  $\epsilon$  tritt in der Mitte des Übergangsbogens auf und wird

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

47) . . . . .  $\epsilon = \frac{2}{T} \cdot \frac{v}{r} = \frac{1}{\text{sek}^2}$

ist also doppelt so groß wie oben bei Abb. 36.

Die ungünstigsten Verhältnisse ergeben sich bei einem kleinen Halbmesser also etwa bei

$$r = 200 \text{ m, } V = 50 \text{ km/h, } v \sim 14 \text{ m/Sek,}$$

dabei ist die Winkelgeschwindigkeit im Kreisbogen

48) . . . . .  $\omega = \frac{v}{r} \sim \frac{14}{200} \sim 0,07 = \frac{1}{\text{sek}}$

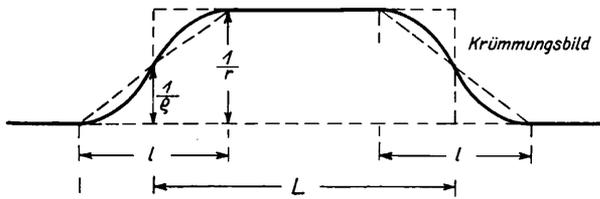


Abb. 37.

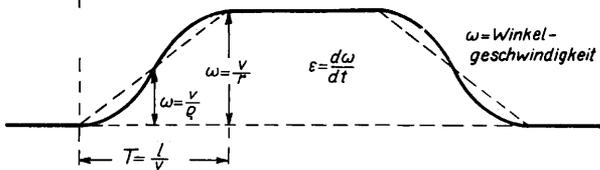


Abb. 38.

Abb. 37 und 38. Im Übergangsbogen mit geschwungenem Krümmungsverlauf ist die größte Drehbeschleunigung der

$$\text{Lokomotive } \epsilon = \frac{2}{T} \cdot \frac{v}{r}.$$

Für die Fahrzeit T im Übergangsbogen wird die größte Drehbeschleunigung der Lokomotive nach Gl. 47):

für T = 1 2 3 4 5 sek

49) . . . wird  $\epsilon = 0.14 \ 0.07 \ 0.047 \ 0.035 \ 0.028 \ \frac{1}{\text{sek}^2}$ .

Unter den Lokomotiven möge eine betrachtet werden, die an der Grenze nach der ungünstigen Seite liegt.

Für die Rangierlokomotive (Tanklokomotive) Gt 44<sup>17</sup> Reihe 81 (68 t Gesamtgewicht, 8,5 t Raddruck, 4,2 m Radstand) ist J rund 36,5 tm . sek<sup>2</sup>.

Der Seitendruck S des führenden Rades auf die Schiene wird somit nach Gl. 42)

$$M = S \cdot 4,2 = 36,5 \cdot \epsilon$$

50) . . . . .  $S \sim 8,7 \epsilon = t$

für T = 1/4 1/2 1 2 3 4 5 sek

51) . . . wird  $S \sim 4.8 \ 2.4 \ 1.2 \ 0.6 \ 0.4 \ 0.3 \ 0.24 \ t$ .

Was diese Zahlen bedeuten, wird anschaulich durch einen Vergleich mit den Seitendrücken S infolge der Fliehkraft.

Nach Gl. 4) ist die zulässige Schwankung der Mittelkraft aus Fliehkraft und Gewicht um die Mittellage des Gleises

4) . . . . .  $\text{tg } \varphi - \text{tg } \gamma \sim 0,04 \text{ nach außen}$   
 $\sim 0,08 \text{ nach innen.}$

Das heißt, ein Gleisbogen ohne Überhöhung der äußeren Schiene kann unbedenklich mit  $\text{tg } \varphi \sim 0,04$  befahren werden, als äußerste Grenze kommt  $\text{tg } \varphi \sim 0,08$  in Betracht.

Das heißt, in einem Gleisbogen ohne Überhöhung ist

52) . . . . .  $V^2 \sim 5r$  noch unbedenklich

$$V^2 \sim 10r \text{ die äußerste zulässige Grenze.}$$

Für einen Gleisbogen ohne Überhöhung mit dem Halbmesser  $r = 200 \text{ m}$  ist somit hinsichtlich der Fliehkraft

53) . . .  $V = 32 \text{ km/h}$  unbedenklich  
 $V = 45 \text{ km/h}$  die äußerste zulässige Grenze.

Dies deckt sich auch mit den Erfahrungen über die zulässigen Geschwindigkeiten in den Weichenbögen. <sup>5)</sup>

Dabei wird die Fliehkraft

$$H = G \text{ tg } \varphi$$

oder der Seitendruck S des Rades infolge der Fliehkraft

54) . . .  $S \sim 0,04 \cdot 8,5 \sim 0,34 \text{ t}$  unbedenklich

$$S \sim 0,08 \cdot 8,5 \sim 0,68 \text{ t die äußerste zulässige Grenze.}$$

Daraus darf man wohl mit Bezug auf die Zahlen 51) den Schluß ziehen, daß bei einer Fahrzeit  $T > 3 \text{ Sek.}$  für die Fahrt durch den Übergangsbogen die Drehbeschleunigung der Lokomotive um ihre senkrechte Achse unbedenklich ist.

Bei den Lokomotiven der Reise- und Güterzüge ist  $\frac{J}{a}$  kleiner als bei der Lokomotive Gt 44<sup>17</sup>, daher  $T > 3 \text{ Sek.}$  ganz unbedenklich.

Daraus folgt weiter, daß in den Gleisbögen der Weichen, bei denen die Übergangsbögen fehlen, also T sehr kurz wird, die Drehbeschleunigung der Lokomotive um ihre senkrechte Achse gefährlich werden kann und maßgebend wird für die Höchstgeschwindigkeit, mit der die Weichenbögen befahren werden dürfen. Hierauf soll aber nicht weiter eingegangen werden, denn es handelt sich bei dieser Untersuchung nicht darum, welche Geschwindigkeiten äußersten Falles zugelassen werden können, sondern darum, wie die Übergangsbögen möglichst vollkommen gestaltet werden können.

Der Seitendruck S des führenden Rades infolge der Drehbeschleunigung wirkt bei der Einfahrt in den Übergangsbogen auf die äußere Schiene, bei der Ausfahrt aus dem Übergangsbogen auf die innere Schiene. Er setzt sich zusammen mit dem Seitendruck der Fliehkraft, der sich nach Abb. 1 aus  $\text{tg } \varphi - \text{tg } \gamma$  ergibt, und der je nach der Geschwindigkeit auf die äußere oder innere Schiene wirkt. Endlich wird die Lokomotive, da die Räder beiderseits gleiche Wege abwickeln, die Längen der Schienen aber verschieden sind, aus dieser geometrischen Bedingung immer mit dem führenden Rad an die Außenschiene gedrängt.

Bei der Einfahrt in den Bogen wird daher das vordere Rad immer an der Außenschiene geführt. Bei der Ausfahrt aus dem Bogen kann aber der Einfluß der Drehbeschleunigung um die senkrechte Achse überwiegen, wenn die Fahrzeit T durch den Übergangsbogen zu kurz wird. Der bekannte unruhigere Lauf der Fahrzeuge bei der Ausfahrt aus dem Bogen ist die Folge des Widerstreites zwischen der Massenwirkung und der Reibung.

Ein vierrädriges Fahrzeug steht im Übergangsbogen auf einer windschiefen Fläche. Wenn die Federung zwischen Rad und Wagenkasten ausgeschaltet wird, so tragen zwei Räder über Eck das ganze Fahrzeuggewicht, die beiden anderen Räder sind entlastet, und der Wagen kann um die Verbindungslinie der beiden tragenden Räder kippen. Kippt er nach der Innenseite des Bogens (wenn  $\text{tg } \varphi < \text{tg } \gamma$ ), so kann der Spurranz des entlasteten äußeren Rades sich gegebenenfalls über die Außenschiene erheben, und, wenn dieses entlastete Rad das führende ist (bei der Ausfahrt aus dem Bogen), so entgleist das Fahrzeug.

Durch die Wirkung der Federung zwischen Rad und Wagenkasten wird diese Gefahr abgeschwächt. Es bleibt aber immerhin ein Unterschied in der Belastung der über Eck stehenden Räder. Dieser Unterschied darf nicht so groß werden, daß bei der Ausfahrt aus dem Bogen das führende, weniger belastete Rad an der Schiene aufsteigen kann. Der

<sup>5)</sup> Niemann: Vermehrte Anwendung schlanker Weichen. Verkehrstechn. Woche 1932 Seite 527.

Wagenkasten wird durch diese Auflagerung auf Verdrehen beansprucht.

Diese Rücksichten bleiben maßgebend für die Festsetzung einer größten zulässigen Neigung für die Überhöhungsrampe, die nicht überschritten werden darf. Sie ist abhängig vom Federspiel, dem größten Radstand der Fahrzeuge und der Verdrehungsfestigkeit des Wagenkastens. Für jede Überhöhung der äußeren Schiene im Bogen ergibt sich somit eine Mindestlänge des Übergangsbogens, die nicht unterschritten werden darf.

Bezüglich der Drehbeschleunigungen der Fahrzeuge um ihre drei Achsen ist maßgebend die Drehung um die Parallele zur Längsachse. Wenn man hierfür die Fahrzeit durch den Übergangsbogen mit mindestens 3,6 Sek. bemißt, oder, was dasselbe ist, die Länge des Übergangsbogens in m mindestens gleich der Fahrgeschwindigkeit in km/h wählt, so bleiben sämtliche Drehbeschleunigungen innerhalb der zulässigen Grenzen.

Die Einfachheit der Berechnung eines Übergangsbogens mit geschwungener Krümmungslinie soll an folgendem Beispiel gezeigt werden:

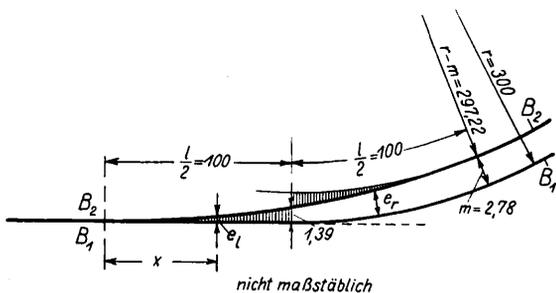


Abb. 39. Übergangsbogen mit geschwungenem Krümmungsverlauf, gültig für  $r = 300$ ,  $l = 200$  Meter.

Es sei  $r = 300$  m,  $l = 200$  m

55) . . für  $x = \frac{l}{2} = 100$  m wird  $e = \frac{l^2}{96 r} = \frac{200 \cdot 200}{96 \cdot 300} = 1,39$  m

56) . . für  $x = l = 200$  m wird  $e = m = 2 \cdot 1,39 = 2,78$  Meter  
von  $x = 0$  bis  $x = \frac{l}{2} = 100$  m wird

$e = 0$  bis  $e = 1390$  mm nach einer Parabel 4. Grades.

Für $x = 0$	20	40	60	80	100 m
oder $\xi = 0$	2	4	6	8	10
wird $\xi^4 = 0$	16	256	1296	4096	10000

57) . . somit  $e = \frac{\xi^4}{10000} \cdot 1390 = 0,139 \xi^4$

58) . .  $e = 0 \quad 2 \quad 36 \quad 180 \quad 570 \quad 1390$  mm.

In der zweiten Hälfte des Übergangsbogens sind die Werte  $e_r$  symmetrisch gleich  $2780 - e_1$  abzutragen vom Bogen  $B_1$  entsprechend Abb. 39.

Für  $x = 0$  bis  $x = 100$  wird  $e_1 = 1,39 \left(\frac{x}{100}\right)^4$ .

Für  $x = \frac{l}{2}$  wird  $\delta = \frac{1}{12 r} = \frac{200}{12 \cdot 300} = 0,0555$  in Bogenmaß, demnach

59) . . .  $\delta^0 = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{5,55}{100} = 3,18^\circ = 3^\circ 11'$ ,

für  $x = l$  wird  $\alpha_2$  der Winkel der Endtangente

60) . . .  $\alpha_2 = 6 \cdot 3^\circ 11' = 19^\circ 6'$ .

Natürlich kann man an das Ende des Übergangsbogens auch einen Kreisbogen mit dem Halbmesser  $r = 300$  m statt  $300 - 2,78$  m anschließen.

Abb. 40 zeigt in der oberen ausgezogenen Linie die Ordinaten  $e_1$  des Übergangsbogens für  $r = 300$  m und  $l = 200$  m

mit geschwungener Krümmungslinie für  $x = 0$  bis  $x = \frac{l}{2} = 100$  m. Zum Vergleich sind in der unteren gestrichelten Linie die Ordinaten  $e_1$  eines Übergangsbogens für  $r = 300$  m mit gerader Krümmungslinie dargestellt. Beide Übergangsbögen erhalten die gleiche Querverschiebung des verbleibenden Kreisbogens  $m = 2780$  mm, die Länge des Übergangsbogens mit gerader Krümmungslinie wird daher

$$l = \frac{200}{\sqrt{2}} = 141 \text{ m.}$$

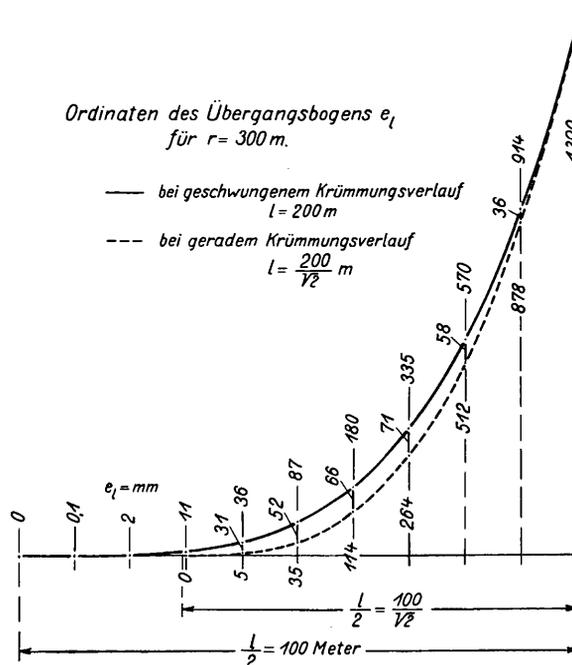


Abb. 40.

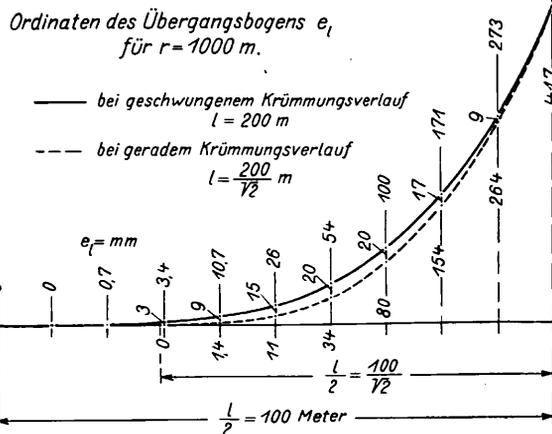


Abb. 41.

Abb. 40 und 41. Genaue Form des Anfanges der Summenlinien Abb. 30 und Abb. 26.

Abb. 41 zeigt die Ordinaten  $e_1$  für  $x = 0$  bis  $x = \frac{l}{2}$  für  $r = 1000$  m und  $l = 200$  m bei geschwungener Krümmungslinie (ausgezogen) und  $l = \frac{200}{\sqrt{2}}$  m bei gerader Krümmungslinie (gestrichelt)

Wenn auch nach Abb. 40 in den ersten 10 m, nach Abb. 41 in den ersten 20 m die Querverschiebung  $e_1 < 1$  mm ist, so zeigt doch der weitere Verlauf der Linien einen erheblichen Unterschied in den Ordinaten.

Diese Linien zeigen die genaue Form des Anfanges der Summenlinien Abb. 30 und Abb. 26. Für ein Krümmungsbild zwischen Abb. 35 und Abb. 37 ergibt sich somit eine Summenlinie zwischen den beiden Linien der Abb. 40 oder Abb. 41.

Ist man durch die örtlichen Verhältnisse genötigt, den Übergangsbogen möglichst kurz zu machen, so führt die Rücksicht auf die zulässige Rampenneigung auf ein Krümmungsbild mit im wesentlichen gradlinigem Verlauf der Krümmung aber mit guter Ausrundung der Krümmungslinie am Anfang und Ende des Übergangsbogens also auf eine Form, die zwischen Abb. 35 und 37 liegt. Bei kurzen Übergangsbögen kann die Drehbeschleunigung um die senkrechte Achse ausschlaggebend werden. Manche halten auch aus diesem Grunde, wegen des Widerstreites zwischen Massenwirkung und Reibung, um Schwingungen der Fahrzeuge bei der Ausfahrt aus dem Bogen zu vermeiden, eine konstante Drehbeschleunigung für besser als eine veränderliche, weil ihr Höchstwert kleiner ist.

Wie dem auch sei, das Verfahren von Schramm bietet die Möglichkeit, für irgend ein Krümmungsbild, das irgend einem Bild der Drehbeschleunigung entspricht, durch zweimalige Integration (in diesem Falle zeichnerisch) den Gleisbogen mit dem gewünschten Krümmungsverlauf zu ermitteln. Eine solche Möglichkeit gab es bisher nicht.

### Das Winkelbildverfahren in der Praxis.

Von Reichsbahnbaumeister Dr. Ing. Gerhard Schramm, Mannheim.

In dem Aufsatz „Der Übergangsbogen im Eisenbahngleis“ gibt Petersen eine Darstellung des Winkelbildverfahrens zum Abstecken von Bogen. Als Ergänzung zu dieser Arbeit soll im folgenden gezeigt werden, wie das Verfahren in der Praxis aussieht, wenn man als Standlinie, von der aus ein Bogen abgesteckt werden soll, nicht einen Kreisbogen, sondern erstens einen beliebigen Polygonzug und zweitens einen vorhandenen Gleisbogen benutzt. Dabei soll auch die zweckmäßige Wahl der Maßstäbe für die graphischen Ermittlungen behandelt werden. Drittens wird angegeben, welche Genauigkeit sich mit dem Verfahren erzielen läßt, bei Verwendung eines Gleisbogens als Standlinie.

#### A. Die Abbildungskonstanten.

Wesentlich bei dem Verfahren ist, daß sowohl die Standlinie  $\bar{B}_1$  als auch der abzusteckende Bogen  $\bar{B}_2$  (Originale) unter Zugrundelegung der beiden folgenden Gleichungen in einer Bildebene (Zeichenblatt) abgebildet werden:

$$\begin{aligned} x &= c_1 \cdot \bar{l} \dots\dots\dots 1) \\ y &= c_2 \cdot \varphi \dots\dots\dots 2) \end{aligned}$$

Hierin sind  $x$  und  $y$  die Abszissen und Ordinaten eines im allgemeinen rechtwinklig angenommenen Koordinatensystems,  $\bar{l}$  die auf der Originallinie  $\bar{B}_1$  gemessenen Längen und  $\varphi$  die von der Anfangstangente aus bis zu beliebigen Punkten der Originallinie durchlaufenen Zentriwinkel in Bogenmaß. Die Größen des Originals werden im folgenden im allgemeinen von denen des Bildes durch Überstreichen unterschieden.

$c_1$  und  $c_2$  sind Abbildungskonstante, für deren Wahl praktische Gesichtspunkte maßgebend sind.  $c_1$  ist der „Längenmaßstab“; er stellt eine Beziehung zwischen zwei Längen ( $x$  und  $\bar{l}$ ) her und ist demnach eine unbenannte Zahl.  $c_2$  ist der „Winkelmaßstab“; er stellt eine Beziehung zwischen einer Länge ( $y$ ) und einer unbenannten Zahl ( $\varphi$ ) her und hat demgemäß die Dimension einer Länge (cm). Es empfiehlt sich, als einheitliches Längenmaß ausschließlich das Zentimeter zu verwenden. Wenn es sich um rein analytische Ermittlungen handelt, wird man der Einfachheit halber oft

Für das neue Verfahren möchte ich den Namen „Winkelbildverfahren“ (nach Nalenz, Höfer, Schramm) vorschlagen.

Seine Bedeutung liegt darin, daß man (innerhalb der in Betracht kommenden Grenzen) jeden beliebigen Krümmungsverlauf im Gleisbogen, auch zwischen Bogen verschiedenen Halbmessers und zwischen Gegenbogen mit einer Genauigkeit festlegen kann, die schärfer ist als die mögliche Genauigkeit beim Verlegen des Gleises.

Hierüber und bezüglich der Verbesserung vorhandener schlechtliegender Gleise sei auf die Abhandlungen von Schramm und Höfer verwiesen.

Die lang umstrittene Frage des Übergangsbogens ist damit grundsätzlich gelöst.

Man kann künftig die Gleisbögen so gestalten, daß die Fahrzeuge in ihnen keine Stöße mehr erleiden. Das konnte man bisher nicht.

Die bisherigen Vorschriften der Bahnverwaltungen über die Gestaltung der Gleisbögen, die sich auf die kubische Parabel beziehen, sind damit überholt und bedürfen einer neuen Fassung.

$c_1 = 1$  und  $c_2 = 1$  cm setzen. Man darf sich dann natürlich nicht wundern, wenn infolge dieser Unterdrückung der Abbildungskonstanten in der Rechnung die Dimensionen in manchen Gleichungen nicht mehr zusammenstimmen.

In den meisten Fällen, besonders dann, wenn man als Standlinie einen Polygonzug oder einen Gleisbogen verwendet, muß man die Abstände  $\bar{e}$  des neuen Bogens  $\bar{B}_2$  von der Standlinie  $\bar{B}_1$  durch eine graphische Summierung ermitteln. Dann empfehlen sich zur Auftragung der Winkelbilder für den

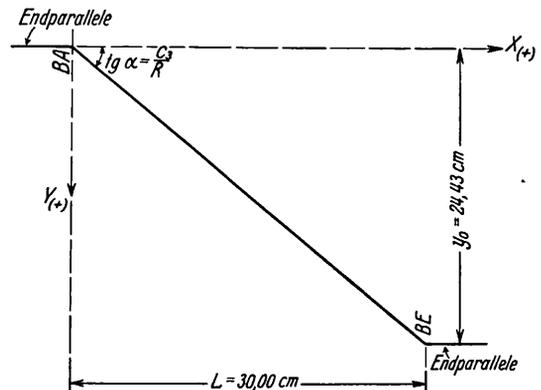


Abb. 1. Winkelbild eines Kreisbogens.

Längenmaßstab  $c_1$  Werte von 1:500 bis 1:2000 und für den Winkelmaßstab  $c_2$  Werte von 50 cm bis 100 cm. Für die Originallinie legt man einen bestimmten positiven Durchfahrungsinn fest (im allgemeinen die km-Richtung); diesem entspricht im Winkelbilde die von links nach rechts verlaufende positive X-Richtung. Die positive Y-Richtung im Bilde nimmt man bei Rechtsbogen (in Richtung des positiven Durchfahrungsinnese gesehen) als von oben nach unten verlaufend an, bei Linksbogen umgekehrt. Es liege z. B. ein rechtswendiger Kreisbogen von der Länge  $\bar{L} = 30000$  cm und dem Zentriwinkel  $\varphi_0 = 0,349$  (in Gradmaß:  $\varphi_0^0 = 20^0$ ) vor. Wählt man zur Abbildung dieses Bogens  $c_1 = 1:1000$  und  $c_2 = 70$  cm, so ergibt sich ein Winkelbild nach Abb. 1. Den beiden End-

tangenten des Bogens entsprechen die beiden „waagerechten“ Endparallelen, die voneinander gemäß Gl. 2 den Abstand  $y_0 = c_2 \cdot \varphi_0 = 70 \cdot 0,349 = 24,43$  cm haben. Dem Kreisbogen entspricht eine um  $\text{tg } \alpha$  (s. unten) gegen die Waagerechte geneigte Gerade von der Abszissenlänge (Gl. 1)

$$L = c_1 \cdot \bar{L} = \frac{1}{1000} \cdot 30000 = 30 \text{ cm.}$$

Führt man als neue Bezeichnung

$$c_3 = \frac{c_2}{c_1} \dots \dots \dots 3)$$

ein, so gilt für den Kreisbogenhalbmesser:

$$R = \frac{c_3}{\text{tg } \alpha} \dots \dots \dots 4)$$

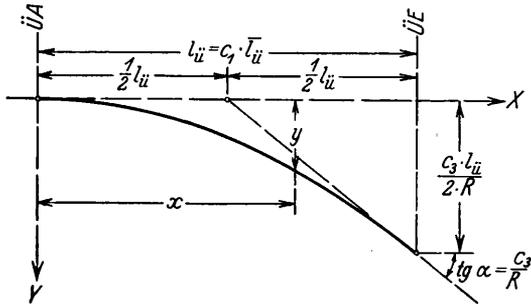


Abb. 2. Winkelbild eines Übergangsbogens mit linear veränderlicher Krümmung.

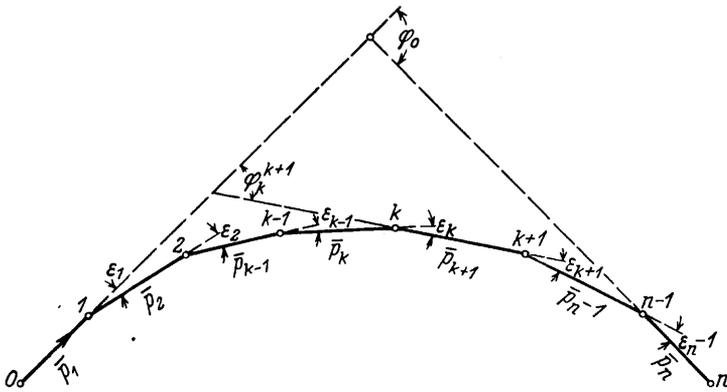


Abb. 3a. Polygonzug (Original).

In unserem Beispiel ist

$$c_3 = \frac{70}{1 : 1000} = 70000 \text{ cm,}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{y_0}{L} = \frac{24,43}{30} = 0,8143$$

und

$$R = \frac{70000}{0,8143} = 85960 \text{ cm.}$$

Das Winkelbild eines Übergangsbogens, dessen Krümmung auf die Länge  $\bar{l}_{ii}$  von  $\frac{1}{\rho} = 0$  auf  $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}$  linear anwächst, hat, wie sich leicht nachweisen läßt, die Gestalt einer quadratischen Parabel von der Gleichung (Abb. 2):

$$y = \frac{c_3}{2 \cdot \bar{l}_{ii} \cdot R} \cdot x^2 \dots \dots \dots 5)$$

Hierin ist  $\bar{l}_{ii} = c_1 \cdot \bar{l}_{ii}$ .

Das Winkelbild eines beliebigen Polygonzuges (Abb. 3a) mit den Seiten  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_k, \dots, \bar{p}_n$  und den Polygonwinkeln  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k, \dots, \epsilon_{n-1}$  hat eine treppenförmige Gestalt nach

Abb. 3b. Die Auftritte der Treppe entsprechen jeweils nach Gl. 1 den Polygonseiten:  $\bar{p}_k = c_1 \cdot \bar{p}_k$ ; und die Steigungen  $\Delta y$  entsprechen jeweils nach Gl. 2 den Polygonwinkeln  $\epsilon$ :  $\Delta y_k = c_2 \cdot \epsilon_k$ . Die Abszisse des Winkelbildes für einen beliebigen Punkt k ist demnach:

$$x_k = c_1 \cdot \sum_{i=1}^{i=k} \bar{p}_i \dots \dots \dots 6)$$

und die Ordinaten y, die jeweils zwischen zwei benachbarten Polygonpunkten konstant sind, folgen dem Ausdruck:

$$y_k^{k+1} = c_2 \cdot \sum_{i=1}^{i=k} \epsilon_i \dots \dots \dots 7)$$

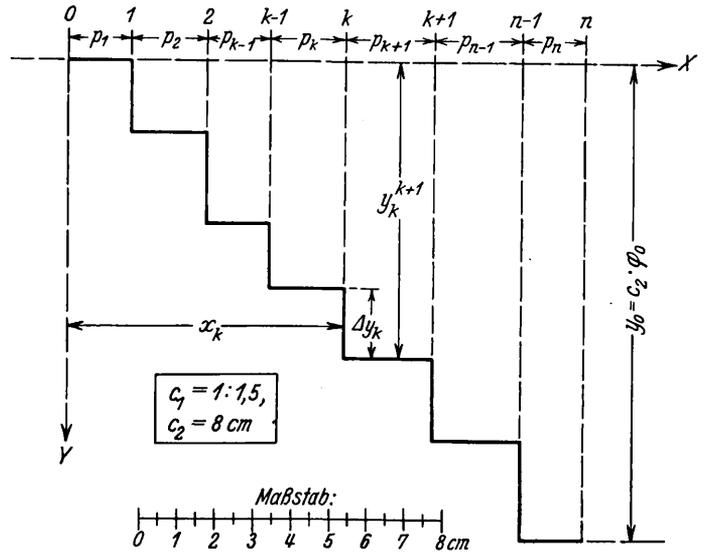


Abb. 3b. Winkelbild.

Die Polygonwinkel können mit einem Winkelmeßinstrument oder einfacher mittels einer Pfeilhöhenmessung ermittelt werden. Sind die Winkel  $\epsilon$  nicht zu groß, was ja

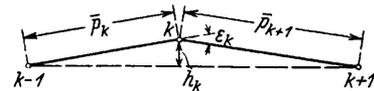


Abb. 4.

ohnedies eine Voraussetzung für die Anwendung des Verfahrens ist, so ist nach Abb. 4:

$$\epsilon_k = \frac{h_k}{\bar{p}_k} + \frac{h_k}{\bar{p}_{k+1}} \dots \dots \dots 8)$$

Die Konstruktion des Winkelbildes eines gegebenen Polygonzuges bereitet hiernach keine Schwierigkeiten; umgekehrt läßt sich zu jedem Winkelbilde leicht die zugehörige Originallinie im Gelände abstecken.

### B. Polygonzug als Standlinie.

Um von einem gegebenen oder angenommenen Polygonzuge  $\bar{B}_1$  aus einen Bogen  $\bar{B}_2$  mit beliebig gegebenem Krümmungsverlauf abzustecken, bringt man zunächst die treppenförmige Bildlinie  $B_1$  des Polygonzuges in geeigneten Maßstäben  $c_1$  und  $c_2$  (s. oben) zu Papier (Abb. 5a). Wir nennen sie im folgenden kurz „Bildlinie“. In das gleiche Winkelbild wird das Bild  $B_2$  des abzusteckenden Bogens  $\bar{B}_2$  eingetragen. Wir bezeichnen dieses als „Entwurf“. In Abb. 5a stelle z. B. die gekrümmte Linie AE den Entwurf dar.

Die Grundgleichung des Winkelbildverfahrens zur Ermittlung der Abstände  $\bar{e}$  lautet nun (vergl. Petersen a. a. O. Gl. 22):

$$\bar{e} = \int \delta \cdot d\bar{l} \dots \dots \dots 9)$$

Die Winkel  $\delta$  sind nun gemäß Gl. 2 den Ordinattendifferenzen  $d$  zwischen Bildlinie und Entwurf proportional:  $\delta = \frac{d}{c_2}$ ; ferner ist gemäß Gl. 1:  $d\bar{l} = \frac{dx}{c_1}$ . Damit kann man Gl. 9 in der folgenden Form schreiben:

$$\bar{e} = \frac{1}{c_1 \cdot c_2} \cdot \int d \cdot dx \dots \dots \dots 10)$$

In dieser Gleichung stellt  $\int d \cdot dx$  nichts anderes vor als die Summe der Flächen in  $\text{cm}^2$  bis zu einer beliebigen Stelle  $x$ , die von Bildlinie und Entwurf eingeschlossen werden. Nennt man die einzelnen Differenzflächen  $F$ , so ist demnach der Abstand  $\bar{e}$  am Ende einer beliebigen  $k$ -ten Fläche  $F_k$ :

$$\bar{e}_k = \frac{1}{c_1 \cdot c_2} \cdot \sum_{i=1}^{i=k} F_i \dots \dots \dots 10a)$$

Um die Abstände  $\bar{e}$  als Ordinaten von einer Abszissenachse aus zu Papier zu bringen (Summenlinie), dividiert man

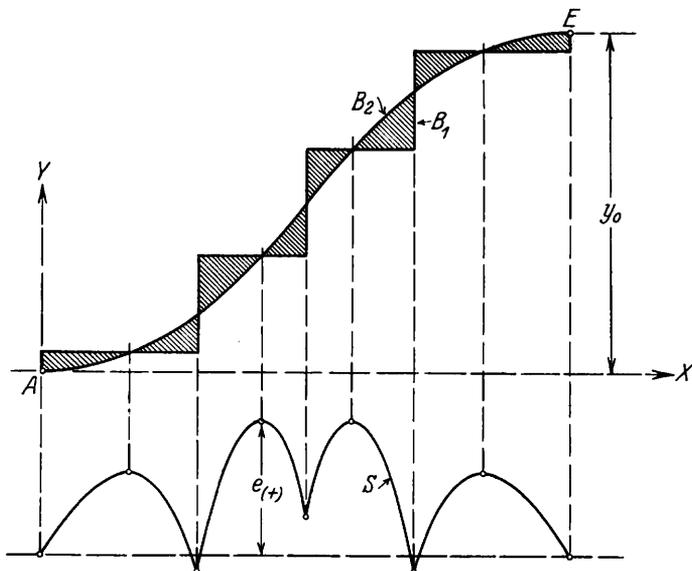


Abb. 5a—b.

die  $\bar{e}$  mit einem geeigneten „Verschiebungsmaßstab“  $c_6$  (z. B.  $c_6 = 10$ ). Die Ordinaten der Summenlinie sind dann jeweils:

$$e = \frac{1}{c_1 \cdot c_2 \cdot c_6} \cdot \sum F \dots \dots \dots 11)$$

Man erhält auf diese Weise z. B. aus Abb. 5a in Abb. 5b die mit Null-Kreisen versehenen Punkte der Summenlinie. Die wirklichen Abstände  $\bar{e}$  im Original sind

$$\bar{e} = c_6 \cdot e \dots \dots \dots 12)$$

Positive  $\bar{e}$  sind von der Standlinie nach rechts abzutragen, negative nach links.

Die Inhalte der Differenzflächen  $F$  werden mittels der Simpsonschen Regel ermittelt. Will man Punkte des neuen Bogens nicht nur von den Polygonpunkten, sondern auch von den Polygonseiten aus einmessen, so muß man die vollständige Summenlinie  $S$  zeichnen (Abb. 5b), die sich aus lauter quadratischen oder kubischen Parabeln zusammensetzt.

Die Anwendung des Winkelbildverfahrens in dieser Weise ist geeignet für das Berichtigen mangelhafter Bogenvermarkungen, besonders aber für Neuabsteckungen von Bogen bei Eisenbahn-, Straßen- oder Flußbauten. Sie gewährleistet größere Genauigkeit und führt meist rascher zum Ziele als andere Verfahren.

**C. Gleisbogen als Standlinie.**

Markiert man an einem bestehenden Gleisbogen die Schienenkanten in beliebigen Abständen durch Striche, so

kann man die Gesamtheit der so erhaltenen Punkte als einen Polygonzug auffassen, der dem gegebenen Gleisbogen eingeschrieben ist. Es liegt nahe, den neuen Bogen  $\bar{B}_2$  von diesem Polygonzuge aus abzustecken, d. h. den Gleisbogen als Standlinie zu benutzen, wodurch man abgesehen von anderen Vorteilen das Schlagen eines neuen Polygonzuges erspart.

Aus praktischen Gründen wählt man für die Abstände (Polygonseiten) der Teilstriche eine konstante runde Länge  $\Delta\bar{l}$ , die wir die „Bogenteilung“ nennen wollen. Die Ermittlung der Polygonwinkel  $\epsilon$  erfolgt wieder durch eine Pfeilhöhenmessung. Entsprechend Abb. 4 und Gl. 8 ist:

$$\epsilon_k = \frac{2 \cdot h_k}{\Delta\bar{l}} \dots \dots \dots 13)$$

Die Auftragung des Winkelbildes erfolgt stets auf Millimeterpapier. Man wählt dazu zunächst eine „Abszissen- teilung“  $\Delta x$ , die im Bilde der Bogenteilung des Originals

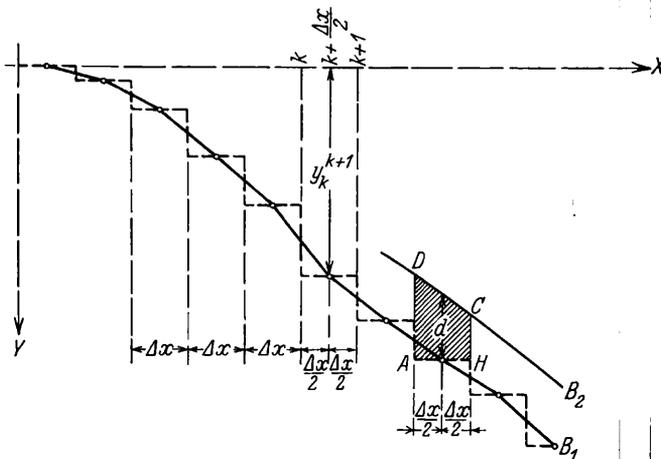


Abb. 6. Winkelbild eines Gleisbogens.

entspricht. Aus praktischen Gründen (wegen der  $\text{cm}$ -Teilung des Papiers) kommen für  $\Delta x$  nur runde Werte wie  $\Delta x = 0,5 \text{ cm}$  oder  $\Delta x = 1 \text{ cm}$  in Frage. Der Längenmaßstab errechnet sich dann gemäß Gl. 1 zu:

$$c_1 = \frac{\Delta x}{\Delta\bar{l}} \dots \dots \dots 14)$$

(z. B.:  $\Delta\bar{l} = 400 \text{ cm}$ ,  $\Delta x = 0,5 \text{ cm}$ :  $c_1 = \frac{0,5}{400} = 1:800$ ).

Die Ordinaten des Winkelbildes sind nun, wenn man Gl. 13 in Gl. 7 einsetzt:

$$y_k^{k+1} = \frac{2 \cdot c_2}{\Delta\bar{l}} \cdot \sum_{i=1}^{i=k} h_i = c_5 \cdot \sum_{i=1}^{i=k} h_i \dots \dots \dots 15)$$

Hierin ist

$$c_5 = \frac{2 \cdot c_2}{\Delta\bar{l}}, \dots \dots \dots 16)$$

eine Abbildungskonstante, die wir den „Pfeilhöhenmaßstab“ nennen wollen. Man erhält demnach das Winkelbild  $B_1$  des dem Gleisbogen eingeschriebenen Polygonzuges, indem man die gemessenen Pfeilhöhen  $h$  im Feldbuche fortlaufend summiert, die einzelnen Summen mit dem Pfeilhöhenmaßstabe  $c_5$  multipliziert und als Ordinaten von einer  $X$ -Achse aus zu Papier bringt. Das Ergebnis ist bei einem Rechtsbogen z. B. die gestrichelte treppenförmige Linie der Abb. 6.

$B_2$  stelle in Abb. 6 ein Stück des Entwurfs dar. Wenn die Bogenteilung  $\Delta\bar{l}$  genügend klein gewählt ist, erfahrungsgemäß genügt

$$\Delta\bar{l} \approx \frac{R}{100}, \dots \dots \dots 17)$$

so kann man den Entwurf jeweils auf die Längen  $\Delta x$  als geradlinig ansehen, auch wenn er — z. B. auf die Länge der Übergangsbogen — gekrümmt ist. Die Konstruktion der Summenlinie, d. h. die Ermittlung der Differenzflächen zwischen der Bildlinie  $B_1$  und dem Entwurf  $B_2$  läuft dann auf die Summierung lauter kleiner Trapezflächen (AHCDA) hinaus. Diese geschieht, indem man die Ordinattendifferenzen  $d$  jeweils in der Mitte der Trapezflächen abgreift und fortlaufend graphisch mit dem Zirkel summiert, wobei die Ordinaten  $e$  der Summenlinie selbstverständlich um die halbe Streifenbreite  $\frac{\Delta x}{2}$  nach rechts verschoben abgetragen werden müssen.

Da bei dieser Art der Konstruktion der Summenlinie von der treppenförmigen Bildlinie nur die in der Mitte der einzelnen Auftritte gelegenen Punkte (in Abb. 6 mit Nullkreisen versehen) benötigt werden, kann man auf das Zeichnen einer treppenförmigen Bildlinie überhaupt verzichten. Man trägt vielmehr die Werte  $y_k^{k+1}$  (Gl. 15) von vornherein um die Abszissenlänge  $\frac{\Delta x}{2}$  nach rechts gegen die Punkte  $k$  verschoben als Ordinaten  $\left(y_{k+\frac{\Delta x}{2}}\right)$  ab und verbindet der Anschaulichkeit wegen die auf diese Weise erhaltenen Punkte geradlinig. Das Ergebnis ist dann statt der gestrichelten Treppenlinie der Abb. 6 die ausgezogene gebrochene Linie, die wir als Winkelbild des gegebenen Gleisbogens schlechthin ansehen können\*).

Da die einzelnen Differenzflächen  $F = \Delta x \cdot d$  sind, so ist nach Gl. 10a:

$$\bar{e} = \frac{\Delta x}{c_1 \cdot c_2} \cdot \Sigma d \dots \dots \dots 10b)$$

wobei  $\Sigma d$  die Ordinaten der Summenlinie sind. Der Verschiebungsmaßstab ist hiernach:

$$c_6 = \frac{\Delta x}{c_1 \cdot c_2} \dots \dots \dots 18)$$

Wenn der vorliegende Gleisbogen einen stetigen Verlauf hat, d. h. keine scharfen Knicke aufweist, so kann die Messung der Pfeilhöhen auch an einer Sehne  $\bar{s}$  erfolgen, die das Vierfache der Bogenteilung  $\Delta l$  beträgt  $\left(c_4 = \frac{\bar{s}}{\Delta l} = 4\right)$ . In diesem Falle ist dann der Pfeilhöhenmaßstab:

$$c_5 = \frac{c_2}{2 \cdot \Delta l} \dots \dots \dots 16a)$$

Die im vorstehenden beschriebene Methode des Gleisbogenabsteckens ist als Nalenz-Höfer-Verfahren bekannt. Es erscheint hier also als Sonderfall der Anwendung des allgemeinen Winkelbildverfahrens\*\*). Auf Einzelheiten der Anwendung und die verschiedenen Kunstgriffe, die es ermöglichen bei Bogenabsteckungen auch die schwierigsten Aufgaben leicht zu lösen kann hier nicht näher eingegangen werden\*\*\*).

\*) Es ist zu beachten, daß das Winkelbild seinem Wesen nach stets ein Bild der durchlaufenen Winkel des Originals darstellt, nie aber ein Bild der gemessenen Pfeilhöhen. Die Ausführungen, die Weiß (Org. Fortschr. Eisenbahnwes. 1932, Heft 6, S. 128, 129) hierüber gemacht hat, beruhen daher auf einem Irrtum.

\*\*) Auch das rein rechnerische Verfahren von Chappellet, das auf die im Abschnitt B beschriebene Methode hinausläuft, ist als spezielle Anwendung des Winkelbildverfahrens aufzufassen (s. „Monatsschrift der Internationalen Eisenbahnkongreß-Vereinigung“, Dez. 1931).

\*\*\*) Vergl. Höfer: „Die Absteckung von Gleisbogen aus Evolventenunterschieden“, Berlin 1927; Schramm: „Das Abstecken von Gleisbogen nach dem Evolventenverfahren von Nalenz-Höfer“ und „Beitrag zum Abstecken der Gleisbogen mittels Pfeilhöhenmessung“, Sonderdrucke aus „Die Gleistechnik“ 1929 und 1930, „Allgemeine Theorie des Nalenz-Höfer-Verfahrens“, Org. Fortschr. Eisenbahnwes. 1931, Heft 16.

### D. Die Genauigkeit.

Der Begriff der Genauigkeit ist bei Bogenabsteckungen für technische Zwecke notwendigerweise ein anderer als sonst in der Geodäsie. Denn während bei einem der Landesvermessung dienenden Triangulationsnetz die absolute Lage der Festpunkte auf der Erdoberfläche (nach geographischer Länge und Breite) das Wesentliche ist, kommt es bei einer Bogenabsteckung hierauf überhaupt nicht an. Ein Bogen, besonders aber ein Gleisbogen, hat nur die eine Aufgabe: richtig gekrümmt zu sein. Jede darüber hinausgehende Forderung ist sinnlos und beruht auf einer Verkennung des Wesens und des Zwecks des Gleisbogens. Eine Gleisbogenabsteckung stellt zunächst immer nur einen Polygonzug vor, durch dessen Punkte beim Bau oder beim Ausrichten ein möglichst stetiger Bogen zu verlegen ist. Die Krümmung dieses Bogens hängt nun lediglich von der Lage je dreier benachbarter Absteckungspunkte zueinander ab. Daher ist zur Nachprüfung eines Gleisbogens oder einer Bogenabsteckung nur ein solches Verfahren brauchbar, das diese Lage je dreier Punkte zueinander erfaßt, also eine Pfeilhöhenmessung. Nachprüfungen von Ordinaten bezogen auf irgendwelche Tangenten, Nachprüfungen des Scheitelabstandes vom Schnittpunkt der Endtangenten und dergl. sind dagegen wertlos, weil durch solche Messungen nicht der Krümmungsverlauf unmittelbar erfaßt wird, auf den allein es ankommt. Dies muß betont werden, weil verschiedentlich versucht worden ist, auf Grund derartiger falscher Prüfungsmethoden dem Nalenz-Höfer-Verfahren mangelnde Genauigkeit nachzuweisen.

Eine Gleisbogenabsteckung ist dann genau, wenn die Fehler der an je drei benachbarten Punkten gemessenen Pfeilhöhen ein gewisses kleines Maß nicht überschreiten oder kleiner sind als die in der Praxis beim Ausrichten der Gleise unvermeidlichen Abweichungen.

Es sind nun die beiden Fragen zu beantworten:

1. Wie verhält sich das Winkelbildverfahren hinsichtlich seiner Genauigkeit zu den anderen Absteckungsmethoden?
2. Sind die Krümmungsfehler der Absteckungen nach dem Winkelbildverfahren kleiner als die beim Ausrichten der Gleise unvermeidlichen Abweichungen?

Diese Fragen können einwandfrei nur auf statischem Wege durch eine große Anzahl von Messungen an ausgeführten Absteckungen beantwortet werden. Bevor wir die Ergebnisse solcher Messungen mitteilen, seien noch einige Worte über den Einfluß der Annäherungen erlaubt, die in der Theorie des Verfahrens zugelassen werden.

In der Grundgleichung des Verfahrens (Gl. 9) ist statt  $tg\delta$  der Wert  $\delta$  eingeführt. Besondere Untersuchungen ergeben, daß dies in allen praktisch vorkommenden Fällen zulässig ist, solange  $\delta \lesssim 0,11$  ist, oder gemäß Gl. 2:  $d \lesssim c_2 \cdot 0,11$ . Meist sind die Winkel  $\delta$  viel kleiner, so daß man praktisch fast nie dazu kommt, in der Nähe dieser Grenze arbeiten zu müssen (vergl. auch Petersen a. a. O., Abschn. IV)\*).

Eine gewisse Vorsicht erfordert jedoch die Anwendung der sogen. Bezugslinien. Mit ihnen hat es die folgende Bewandnis: Im Summenbilde kann man die Auftragsabszisse, auf die die Abstände  $e$  als Ordinaten bezogen werden, durch eine nach bestimmten Regeln zu konstruierende „Bezugslinie“ ersetzen, die sich aus lauter einander tangierenden quadratischen Parabeln oder Geraden zusammensetzt. Dadurch kann man sich mit den Verschiebungen  $e$  weitgehend irgendwelchen gestellten Bedingungen anpassen (z. B. unverschiebliche Punkte, Verdrehungen von Endtangenten usw.). Jeder Bezugsparabel entspricht nun die Änderung des ursprüng-

\*) Die vom Verfasser im Org. Fortschr. Eisenbahnwes. 1931, Heft 16 aufgestellte Forderung:  $\delta < 0,0873$  ist unnötig streng.

lichen Entwurfshalbmessers um einen gewissen konstanten Betrag, der von der Gestalt der betreffenden Parabeln abhängt. Insbesondere wird auch die Krümmung der Übergangsbogen verändert, d. h. die planmäßigen Übergangsbogen werden etwas „verbogen“, wobei die Krümmung bei ÜBE meist einen etwa anderen Wert bekommt als die des anschließenden Kreisbogens. Es empfiehlt sich nun, in jedem Falle zu untersuchen, ob dieser Krümmungsfehler bei ÜBE infolge einer Bezugsparabel nur einen genügend kleinen Prozentsatz der Krümmung des anschließenden Kreisbogens ausmacht, wobei Abweichungen bis zu 5% ohne weiteres als zulässig anzusehen sind.

Mißt man  $n$  Pfeilhöhen bei einer ausgeführten Bogenabsteckung an je drei benachbarten Punkten, so erhält man die wirklichen Pfeilhöhen  $h_w$ , die von den Sollpfeilhöhen  $h_s$  infolge der zufälligen Fehler stets mehr oder weniger abweichen. Bildet man für alle Punkte die Pfeilhöhenfehler  $f = h_s - h_w$ , so stellt die Größe

$$f_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f^2}{n}} \dots \dots \dots 19)$$

den mittleren Pfeilhöhenfehler dar. Dieser ist das Kriterium für die Genauigkeit der betreffenden Bogenabsteckung. Der Verfasser hat für zahlreiche Absteckungen von Bogen mit verschiedenen Halbmessern diesen mittleren Fehler bestimmt. Es haben sich dabei aus etwa 1000 Pfeilhöhen von Festpunkten in Abständen von 16 bis 20 m in guter Übereinstimmung bei den einzelnen Bogen die folgenden mittleren Fehler ergeben:

1. Bei Absteckungen, die auf Grund einer Pfeilhöhenmessung mit einer Schnurlänge  $\bar{s} = 4 \cdot \Delta \bar{l}$  ( $c_4 = 4$ ) ausgeführt waren:

$$f_m \approx 0,5 \text{ cm};$$

2. Bei Absteckungen, die auf Grund einer Pfeilhöhenmessung mit einer Schnurlänge  $\bar{s} = 2 \cdot \Delta \bar{l}$  ( $c_4 = 2$ ) ausgeführt waren:

$$f_m \approx 0,35 \text{ cm}^*).$$

In diesen mittleren Fehlern sind alle Einzelfehler enthalten, z. B. Ungenauigkeiten bei der Pfeilhöhenmessung, beim Auf-

\*) In Übereinstimmung mit den Überlegungen von Weiß (a. a. O., s. Anm. ob.) erhält man also bei  $c_4 = 2$  etwas genauere Absteckungen als bei  $c_4 = 4$ , wenn auch der Unterschied praktisch belanglos ist.

tragen der Bildlinie, beim Eintragen des Entwurfs, beim Konstruieren der Summenlinie, beim Einzeichnen von Bezugslinien, beim Abgreifen der Abstände  $e$ , beim Einmessen der Abstände  $\bar{e}$  von den Schienenkanten aus, ferner Ungenauigkeiten infolge Verziegens des Zeichenpapiers, ungerader Lineale usw.

Die Untersuchung verschiedener sorgfältig ausgeführter Bogenabsteckungen mit Festpunktabständen von etwa 20 m, die in der früher üblichen Weise mit Kurventabellen und Visierstäben vorgenommen waren, ergab dagegen stets viel größere Werte, nämlich

$$f_m \approx 1,3 \text{ cm}.$$

Das Abstecken vom Gleisbogen aus nach dem Winkelbildverfahren ist demnach hinsichtlich der Genauigkeit den früher üblichen überholten Verfahren überlegen. Dies Ergebnis wird die Kenner des Nalenz-Höfer-Verfahrens keineswegs überraschen. Es ist auch ohne weiteres einleuchtend, daß die verhältnismäßig kleinen Abstände  $\bar{e}$  sich von den Schienenkanten aus viel genauer einmessen lassen als die oft sehr langen Ordinaten von langen Tangenten aus, die durch Visierstäbe festgelegt werden müssen. Damit ist die erste der oben gestellten Fragen beantwortet.

Dem mittleren Fehler von 0,5 cm bei einem Festpunkt- abstand von 20 m, d. h. bei einer Sehnenlänge von 40 m, entspricht bei einer Sehnenlänge von 15 m ein Fehler

$$f_m = 0,5 \cdot \frac{15^2}{40^2} = 0,07 \text{ cm}.$$

Der maximale Fehler bei einer 15 m-Schne beträgt demnach:

$$f_{\max} \approx 3 \cdot 0,07 = 0,21 \text{ cm}.$$

Nun hat die Nachmessung von sehr gut abgesteckten und ausgerichteten Gleisbogen, nämlich von solchen Bogen, deren Richtungslinie beim Befahren mit dem Oberbaumeßwagen noch gar keine Unregelmäßigkeiten erkennen läßt, ergeben, daß bei einer 15 m-Schnur die mittleren und maximalen Fehler stets ein Vielfaches der oben angegebenen Werte 0,07 bzw. 0,21 cm betragen.

Damit ist auch die zweite der oben gestellten Fragen beantwortet und erwiesen, daß bei dem Abstecken der Bogen vom Gleis aus nach dem Winkelbildverfahren — sachgemäße Ausführung selbstverständlich vorausgesetzt — ein Genauigkeitsgrad erzielt wird, der wesentlich über die Bedürfnisse der Praxis hinausgeht.

## Winkelbild- oder Pfeilhöhenverfahren?

Von Oberlandmesser Höfer, Altona.

Die Nutzenanwendung, die man von den aus Versuchen an der Schwebebahn gewonnenen Erkenntnissen auf die Standbahn machen kann, erfährt in der Ausübung manche Einschränkungen, die sich schon vorahnen lassen, sobald man jene Bahnarten begrifflich als Einschienenbahn und Zweischienenbahn oder Gleisbahn unterscheidet.

Bei der Einschienenbahn gibt es keine Überhöhung, also auch keine Rampe; die Tragschiene kann man — im Vergleich zur Gleisbahn — als fest eingespannt betrachten; sie kann ihre Form und Lage nicht verändern, wenn wir von rein elastischen Formänderungen und von Einflüssen des Wärmewechsels abschen. Die Fahrzeuge können auch aus einem Bogen, ohne zu schleudern, unmittelbar in einen Gegenbogen übergehen, wenn die Übergangsbogen zweckentsprechend gestaltet sind.

Bei der Gleisbahn mit Querschwellenbau muß man sich mit der Tatsache abfinden, daß das Gleis sich unter dem Betriebe seitlich verschiebt und auch in der Höhenlage ändert,

sei es durch Nachgiebigkeit der Bettung, sei es durch ungleichmäßige Stopfarbeit. Die Seitenverschiebungen sind oft viel größer, als man erwartet; Ausweichungen bis zu 20 cm aus der alten Lage sind keine Seltenheit. Um diese Veränderungen zu erkennen, ist die Vermarkung nötig. Die Erfahrung hat gelehrt, daß eine Vermarkung in Abständen von 50 m, wie sie die Anlage 7 der Obv. für Bogen von mehr als 500 m Halbmesser vorsieht, viel zu weit ist; denn innerhalb einer solchen Strecke sind noch sehr störende Krümmungswechsel möglich; man sollte allgemein auf 15 m heruntergehen; nur für die Höhenfestlegung genügt der 3—4fache Abstand. Der geringe Aufwand für die dichtere Vermarkung wird durch Erleichterung der Überwachung und Unterhaltung reichlich aufgewogen.

Die Erfahrung hat ferner gelehrt, daß selbst ein sehr sorgfältig gebauter Übergangsbogen nach einigen Monaten einen Korbbogen aus allmählich schärfer sich krümmenden Kreisbogenstücken darstellt, der zwar nicht wesentlich von einer kubischen Parabel abweicht, aber doch den Ansprüchen

des Mathematikers an eine solche Parabel nicht genügt. Einen „vollkommenen Gleisbogen“ gibt es in der Wirklichkeit nicht. Da nun Parabeln vierten Grades in ihrer Form noch viel zarter und empfindlicher gegen angreifende Kräfte sind, müßten zu ihrer Überwachung und Unterhaltung besondere Vorkehrungen getroffen werden. Zum mindesten wäre eine Vermarkung in Abständen von etwa 5 m notwendig und zwar auch der Höhe nach; denn da nunmehr die Rampe eine Raumkurve werden soll, kann der Bahnunterhalter nicht mehr durchtafeln im Zuge der überhöhten Schiene. Die Feinheit der Grundrißform erfüllt aber nur den ihr theoretisch zugedachten Zweck, wenn die Überhöhung ihr überall genau entspricht. Diese Schwierigkeit darf nicht unterschätzt werden.

Prof. Dr. Petersen hat selbst zwei Beispiele durchgerechnet, um die Abweichung der Doppelparabel vierten Grades von der einfachen kubischen Parabel ersichtlich zu machen. Man ersieht aus Abb. 40, daß sie in jeder 100 m langen Hälfte eines Übergangsbogens für den 300 m-Bogen das Höchstmaß von 7 cm, für den 1000 m-Bogen aber nur noch 2 cm erreicht (Abb. 41), also mit wachsendem Halbmesser ziemlich schnell abnimmt.

Die Verbesserung der bisher üblichen Form des Übergangs wird nun begründet mit der wachsenden Fahrgeschwindigkeit; man wird also in erster Linie die Schnellzugstrecken zu Versuchen mit der verbesserten Form ausersuchen: diese aber dürfen Bogen unter 1000 m Halbmesser gar nicht aufweisen. Umgekehrt wird bei Gebirgsbahnen und Nebenbahnen mit scharfen Bogen der durch die neue Anordnung bedingte Längenverlust sehr schmerzlich sein: in engen Flußtäälern oder an Berghängen pflegt sich die Bahnlinie zu schlängeln, und die Gleisbahn kann im Gegensatz zur Einschienebahn die Zwischengerade zwischen Gegenbogen nicht gut entbehren. Man beachte, daß nach den Beispielen der Abb. 40 und 41 die Parabel rund 40 m Längenentwicklung braucht, um sich 1 cm von ihrer Tangente abzulösen. Wenn man so viel Raum hat, wird man sofort einen größeren Halbmesser wählen. Da außerdem auf diesen Bahnen hohe Fahrgeschwindigkeiten ausgeschlossen sind, wird eine seitliche Verschiebung um die Breite eines Schienenkopfes innerhalb einer 100 m langen Strecke schwerlich als nennenswerte Verbesserung empfunden werden.

Mit diesen Erwägungen über den Umfang des wirklichen Nutzens soll das Verdienst Dr. Schramms, zu einer neuen und richtigen Erkenntnis über das Wesen des Übergangsbogens gelangt zu sein, nicht angetastet werden.

Auf einem anderen Blatt steht sein Verdienst um das Evolventenverfahren. Er hat es auf eine eigenartige, wissenschaftlich einwandfreie, elegante Weise begründet: er hat durch seine Veröffentlichungen für das Verfahren geworben: aber irgendwie vervollkommenet oder weiter entwickelt hat er es nicht, es sei denn, daß man die Darstellung kubischer Parabeln auf Millimeterpapier als eine Vervollkommnung des Verfahrens ansprechen wollte. Er hat derartiges auch selbst nicht behauptet, hat aber durch verschiedene Äußerungen den vielleicht nicht beabsichtigten Eindruck erweckt, als habe das Verfahren bisher „auf tönernen Füßen“ gestanden. Hier sind einige Irrtümer zu berichtigen: ich tue es nicht aus persönlichen Gründen, sondern weil ich dies dem verstorbenen Landmesser Nalenz schuldig zu sein glaube.

Dr. Schramm spricht\*) von einer „seltsam verschwommenen Vorstellung —, daß es sich bei dem Verfahren um einen Fehlerausgleich (etwa nach der Methode der kleinsten Quadrate) handele“. Er fährt fort: „Demgegenüber muß ausdrücklich betont werden, daß es sich bei dem Verfahren über-

haupt nicht um Fehler im Sinne der Fehlerrechnung handelt, auch nicht darum, den ursprünglichen Zustand eines verfahrenen Gleisbogens wiederherzustellen usw.“

Um das Jahr 1900, als Nalenz sein Verfahren erfand, dachte man nicht an Linienverbesserungen größeren Ausmaßes; damals war die Gleislage überhaupt nicht vermarkt, und man erkannte, daß es notwendig sei, dieses nachzuholen. Es kam also auf nichts anderes an, als verfahrene Gleise zu berichtigen und zwar möglichst ohne Änderung der Gleislänge, damit Spannungen im Oberbau vermieden würden. Wenn man sich auf diese Aufgabe beschränkt und die seitlichen Verlagerungen als Fehler betrachtet, so liefert das Verfahren bei strengem Ausgleich der Flächen im Bilde der Summenlinie denjenigen Wert für den Halbmesser R, der die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum macht. Diesen Rahmen hat Nalenz nicht überschritten.

Auch 1912 war noch nicht von wesentlicher Verbesserung der Linienführung die Rede. Ich gab daher meiner ersten Veröffentlichung in Buchform noch den Titel „Die Berichtigung der Gleislage in Krümmungen“, eröffnete darin aber schon den Ausblick auf die Möglichkeit einer erweiterten Anwendung des Verfahrens. Hierdurch ist die Bezeichnung „Berichtigungsverfahren“ in die Oberbauvorschriften gelangt und in die neue Ausgabe übernommen worden.

In diesem Zusammenhang scheint bemerkenswert, daß die Bahnverwaltungen großen Wert darauf legen, das Verfahren den mit der Bahnunterhaltung betrauten Beamten zugänglich zu machen, die durchweg mit der Integralrechnung nicht vertraut sind. Bei Vorlage meines ersten Entwurfes forderte man sogleich den Verzicht auf alle Integralformeln und die Unterdrückung aller Gelehrsamkeit. Dadurch sah ich mich gezwungen, das Verfahren auf Anschauung zu gründen, und ich weiß auch heute dazu kein besseres Mittel als die Evolvententheorie. In verwickelten Fällen leistet die Vorstellung der Abwicklung vortreffliche Dienste.

Schramm sagt zwar a. a. O., das Verfahren an sich habe mit Evolventen nicht das geringste zu tun. Aber ist denn die Summe der Pfeilhöhensummen ( $\sum \Sigma h$ ) etwas anderes als eine Evolvente, wenn man sich darunter überhaupt etwas vorzustellen versucht? Oder liegen die Querverschiebungen etwa nicht im Zuge der Evolvente?

Schramm behauptet ferner im Vorwort zu seinem „Vollkommenen Gleisbogen“: „Das Nalenz-Höfer-Verfahren in seiner bisherigen Form gestattete nicht ohne weiteres die Anwendung beliebiger Schnurlängen, Bogenteilung und Maßstäbe“. Ich frage jeden Kenner, ob er von solcher Beschränkung etwas bemerkt hat.

Als Beispiel diene die Absteckung eines langen Bogens auf dem Hindenburgdamm. Der Oberbau sollte verlegt werden: die festliche Einweihung stand unmittelbar bevor, und noch war der Damm bedeckt mit Stapeln von Baustoffen aller Art: der Tangentenschnittpunkt lag weit draußen im Wattenmeer; die Signalstange war von den Sturmfluten längst zerstört, und höchste Eile war geboten. Eine Absteckung aus Koordinaten wäre in dieser räumlichen und zeitlichen Bedrängnis kaum möglich gewesen. Die Dammkrone gab die ungefähre Richtung. Da der Halbmesser groß war (2500 m), ließ ich in Abständen von 20 m nach Aufgange Pfähle einschlagen und die Pfeilhöhen an 80 m-Bogenlängen messen (natürlich mit Fluchtstäben). Die Auftragung der Krümmungslinie aus verkürzten Pfeilhöhen und die Ermittlung der Querverschiebungen an den mit Pfählen vermarkten Punkten war in wenigen Stunden erledigt, und den Erfolg konnte man nicht anders als glänzend bezeichnen; die spätere Nachprüfung der Gleislage ergab nur ganz geringe Abweichungen von der Soll-lage. Teilungsmaß und Maßstäbe sind durchaus gleichgültig.

\*) Org. Fortschr. Eisenbahnwes. 1931, S. 337.

Die eben erwähnte „Krümmungslinie“ soll neuerdings „Winkelbild“ heißen. Man hat mir vorgeworfen, ich hätte die Pfeilhöhensummenlinie mit Unrecht „Krümmungslinie“ genannt; denn die Krümmung sei  $\frac{1}{R}$ . Wer denkt wohl bei der Krümmung eines Weges oder Flusses an den umgekehrten Wert des Halbmessers? Es ist eine Nachlässigkeit unseres Sprachgebrauchs, daß wir „Krummheit“ oder „Krümme“ im allgemeinen nicht von „Krümmung“ unterscheiden: ich bekenne mich selbst zu dieser Nachlässigkeit. Dennoch ist „Krümmung“ eigentlich der Bogen selbst, weder der Halbmesser noch gar sein umgekehrter Wert. Und das Wort „krumm“ schließt im Gegensatz zu „gebogen“ oder „gewölbt“ den Begriff des Schadhafte, Versehrten, Unregelmäßigen ein. Dieses Schadhafte und Unregelmäßige bringt gerade die Pfeilhöhensummenlinie im Vergleich mit dem geradlinigen Entwurf deutlich zur Anschauung; auch kann man an ihr den Krümmungsgrad, nämlich den Halbmesser, der das natürlichste Krümmungsmaß ist, an jeder Stelle auf dem Millimeterpapier ablesen. Deshalb findet die Bezeichnung „Krümmungslinie“ für die Pfeilhöhensummenlinie noch heute meinen — leider „ungeteilten“ — Beifall, weil sie bildkräftig und einprägsam und jedenfalls nicht unrichtig ist.

Was ist aber  $\frac{1}{R}$ ? Die Einheit, geteilt durch ein Längemaß, ist nicht einmal mehr eine reelle Zahl. Um sie als Maß darzustellen, muß man sie sich mit einem Flächenmaß vervielfältigt denken, etwa mit  $S^2$  oder mit  $\frac{1}{8} S^2$ . Dann aber haben wir — die Pfeilhöhe zur Sehne  $S$ , die freilich sehr wohl als Krümmungsmaß gelten kann. Schramm macht gar kein Hehl daraus, daß er unter seiner Krümmungslinie nichts anderes versteht als die „Pfeilhöhenlinie“; denn man soll sich ja das „Winkelbild“, das er unmittelbar aus den Pfeilhöhensummen aufträgt, als Ergebnis einer Integration entlang der „Krümmungslinie“ vorstellen. Meine Krümmungslinie soll also lediglich deshalb nicht mehr so heißen, weil man eine andere Linie damit bezeichnen will, der sie keinesfalls mit größerem Recht zukommt — (denn man müßte genauer „Krummheitslinie“ sagen) — und die bei der Ausübung des Verfahrens zu nichts gebraucht und nicht einmal gezeichnet wird. Da der Ausdruck in dem von mir gebrauchten Sinn sich längst eingebürgert hat, ist es bedauerlich und stiftet Verwirrung, wenn man ihm jetzt eine andere Deutung gibt.

Das ganze Verfahren nun gar nach Prof. Petersens

Vorschlag „Winkelbildverfahren“ zu nennen, scheint mir deshalb verfehlt, weil das Winkelbild nur eine einzelne Entwicklungsstufe des Darstellungsvorgangs ist, bei der man übrigens kaum an Winkel denkt. Man gestatte mir, einen Fall aus der Kriegszeit zu berichten, der als Ausnahme den Vorschlag rechtfertigen könnte.

Gewisse schwere und weittragende Flachbahngeschütze waren fest auf Eisenbahnwagen gebaut; das Geschützrohr konnte nur gekippt, aber nicht um seine Lotachse gedreht werden. Die Geschützwagen wurden als Endglied eines aus Mannschafts- und Schießbedarfswagen bestehenden Zuges in ein krummes Bahnhofsgleis geschoben. Dieses Gleis, für dessen Ausrichtung natürlich keine Zeit, oft auch wohl kein Raum war, mußte nun durch Marken so eingeteilt werden, daß die Halbmesserstrahlen je  $1^0$  oder  $30'$  auseinanderfächerten. Die Anfangstangente wurde durch Winkelbeobachtungen festgelegt. Danach ließen sich die Fächerstrahlen auf der Karte darstellen, und durch Zwischenschaltung ließ sich jede gewünschte Zielrichtung bestimmen. Der Geschützwagen brauchte nur an die entsprechende Gleisstelle geschoben zu werden. Man kann sich denken, daß die Herstellung des Fächers viel Zeit und Mühe kostete. Mit Hilfe des Evolventenverfahrens wurde sie höchst einfach. Man maß die Pfeilhöhen, trug die Krümmungslinie auf und zog die Waagerechten zur Auftraglinie in Abständen von je  $1^0$  oder nach Bedarf  $30'$ , d. h. (bei Anwendung des Höhenmaßstabes 1:10, Pfeilhöhenmessung in 5 m-Abständen und 20 m Sehnenlänge) in Abständen von 1,7453 oder 0,8227 cm. Die Schnittpunkte dieser Waagerechten mit der Krümmungslinie waren als Längemaße für die Fächerteilung auf dem Millimeterpapier unmittelbar abzulesen. Das Ganze war das Werk einer Stunde.

In diesem Fall, bei dem das Verfahren schon mit der Krümmungslinie zu Ende war und die Summenlinie nicht gezeichnet zu werden brauchte, hätte man mit Recht von einem „Winkelbildverfahren“ sprechen können; denn hier kam es ausdrücklich auf Winkel an.

Wenn das Verfahren nicht „Evolventenverfahren“ heißen soll, so nenne man es schlicht und einfach „Pfeilhöhenverfahren“. Eine Verwechslung mit der Anleitung auf Anlage 7 der Obv. ist wohl nicht zu befürchten; denn diese kann nicht als ein „Verfahren“ angesprochen werden, weil das Schaubild — es ist Schramms „Krümmungslinie“ — nur zur Erkennung der Unregelmäßigkeiten dient und weiter nicht benutzt wird. Die Ausrichtung im Annäherungswege ist wegen des Einsatzes einer größeren Rotte viel zu kostspielig und beunruhigt das Gleis nur.

## Grundlage der Bogenberichtigung.

Von Zentralinspektor Dr. E. Feyl, Wien.

Hierzu 16 Abbildungen auf Tafel 30.

### 1. Einleitung.

Jeder Bogen verändert im Betrieb seine Lage. Damit ändern sich in den einzelnen Bogenpunkten auch die Krümmung und der Halbmesser. Haben die Abweichungen des Bogens von seiner planmäßigen Lage unzulässige Werte erreicht und ist der Bogen nicht versteint, dann entsteht die im Bahnunterhaltungsdienst immer wiederkehrende Aufgabe, den durch den Betrieb verdrückten Bogen durch einen mathematisch richtigen Kreisbogen zu ersetzen. Zumeist soll dabei auch ein angemessen langer Übergangsbogen eingelegt werden.

Diese Aufgabe wurde bisher gewöhnlich durch Versuch erledigt, wenn nicht das Verfahren nach Nalenz-Höfer\*) angewendet wird. Es ist aber, wie gezeigt werden wird, auch mit

verschiedenen anderen Verfahren möglich, die Aufgabe der Bogenberichtigung streng richtig zu lösen.

Wenn ein verdrückter Bogen durch einen mathematisch richtigen Bogen ersetzt werden soll und keine Nebenbedingungen zu erfüllen sind (z. B. daß der Bogen durch einen bestimmten Punkt gehen soll, oder daß die Verschiebungen an bestimmten Stellen ein gewisses Maß nicht überschreiten sollen und dergl.), so sind im gleichen Winkelraum unendlich viel Lösungen möglich. Es entsteht die Frage, welche von diesen Lösungen die richtigste ist.

Die erste Bedingung bei der Berichtigung von Gleisbögen ist, daß die Längen des in der Bahn liegenden Bogens und des gesuchten, richtigen Bogens annähernd gleich sein sollen. Wenn der gesuchte Bogen wesentlich kürzer werden würde als der vorhandene Bogen, und zwar um so viel kürzer, daß der Längenunterschied in den Stoßlücken nicht mehr ausgleichbar

\*) Die Absteckung von Gleisbögen aus Evolventenunterschieden von Max Höfer. Berlin: Julius Springer, 1927.

ist, dann müßten einzelne Schienen gekürzt werden: wenn aber der gesuchte Bogen wesentlich länger werden würde als der vorhandene Bogen, müßten statt einiger vorhandener Schienen um einiges längere Schienen eingeschaltet werden, wenn nicht die Stoßlücken so abgeändert werden können, daß ein Ausgleich erzielbar ist. Schienen schneiden und längere Schienen einschalten sind aber Maßnahmen, die zeitraubend sind und auch unnötige Kosten verursachen, daher vermieden werden sollen.

Die zweite Bedingung ist, daß die Verschiebungen des Gleises in der Querrichtung aus der vorhandenen in die berichtigte Lage das geringste Maß haben sollen, das erzielbar ist; besonders deswegen, weil größere Verschiebungen auf Dämmen Anschüttungen und in Einschnitten Abgrabungen notwendig machen, was — wo nur möglich — umgangen werden soll.

Beide Forderungen — gleiche Länge der Bögen und geringste Verschiebungen — können nicht gleichzeitig in aller Schärfe erfüllt werden. Doch liegen die Lösungen in beiden Fällen ziemlich nahe, so daß man sagen kann, beide Forderungen sind praktisch erfüllt, wenn eine der Forderungen erfüllt ist. Es ist daher nur nötig, einer der Bedingungen gerecht zu werden. Es empfiehlt sich, die zweite Bedingung zu wählen, die verlangt, daß die Verschiebungen auf ein Mindestmaß beschränkt werden.

In Abb. 1 ist L der in der Bahn liegende verdrückte Bogen, K der zu suchende Bogen und v die erforderliche Verschiebung eines beliebigen Punktes P in die berichtigte Lage P<sub>1</sub>. Wird der Punkt P für sich allein betrachtet, d. h. nicht im Zusammenhang mit den übrigen Punkten der Linie L, so erreicht die Verschiebung v dann den kleinsten Wert, wenn v = 0 ist, d. h. sobald der Kreisbogen durch den Punkt P hindurchgeht. Damit wäre die Verschiebung des Punktes P auf das Kleinstmaß gebracht worden; aber die bei einer Berichtigung des Bogens erforderliche Verschiebung der Mehrzahl der übrigen Punkte wird dabei im allgemeinen ungünstig beeinflusst werden. Da nun der Punkt P ein beliebiger Punkt der Linie L ist, kann die vorstehende Betrachtung für jeden Punkt dieser Linie angestellt werden. Unter den sich so ergebenden Kreisen wird es einen geben, bei dem die Verschiebung aller Punkte, in ihrer Gesamtheit betrachtet, den günstigsten Wert erreicht. Dies wird der Fall sein, wenn die Summe der Verschiebungen aller Punkte ein Mindestwert ist.

Es soll also  $\sum_{n=1}^{n=m} v_n$  ein Mindestwert werden (vergl. Abb. 2).

Dies trifft zu, wenn  $\sum_{n=1}^{n=m} v_n = 0$  ist. Diese Gleichung bleibt ungeändert, wenn sie mit dem festen Wert  $\Delta x$ , der Teilung des richtigen Bogens, vervielfacht wird. Man kann also auch schreiben

$$\sum_{n=1}^{n=m} v_n \Delta x = 0.$$

Geht man auf unendlich kleine Größen über, so lautet die Bedingung

$$\int_{x=0}^{x=a} v \, dx = 0.$$

$$DBELD = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} + \frac{h}{3} \left[ y_0 \left( 1 - \frac{3a}{2h} \right) + y_{2n} \left( 1 - \frac{3b}{2h} \right) + 2 \sum_{m=1}^{m=n-1} y_{2m} + 4 \sum_{m=1}^{m=n} y_{2m-1} \right].$$

Die Fläche ABCKA ergibt sich aus der Bedingung  
ABCKA = ABCMA — AMCKA.

Aus Abb. 3 ergibt sich ferner, wenn R der Halbmesser

Das Integral stellt aber nichts anderes dar als die Fläche zwischen dem verdrückten Bogen und dem richtigen Bogen. Die Verschiebungen erreichen also einen Mindestwert, wenn diese Fläche den algebraischen Wert 0 hat. In einer Formel ausgedrückt, lautet die Bedingung

$$F = 0.$$

Diese Gleichung ist die Grundgleichung der Bogenberichtigung. Im folgenden sind einige Verfahren angedeutet, nach denen bei Bogenberichtigungen vorgegangen werden kann.

## 2. Verfahren mit einer Schneidenden.

Wenn in Abb. 3 L der in der Bahn liegende Bogen und K der gesuchte richtige Bogen ist, dann muß nach der Grundgleichung  $F = 0$  die Fläche zwischen den beiden Linien K und L 0 sein. Sind D und E die Berührungspunkte der Linie L mit den Berührenden HB und BN, so muß demnach

$$\text{Fläche DAKCELD} = 0$$

sein. Hieraus entsteht die Bedingung

$$ABCKA - DBELD = 0.$$

Wenn der Bogen nicht besonders lang und die Sicht über den Bogen unbehindert ist, dann kann zur Bestimmung der Fläche DBELD eine den Bogen schneidende Gerade FG gelegt werden, auf die die Fahrkante der Außenschienen des in der Bahn liegenden Bogens bezogen wird. Die Endpunkte F und G sind derart anzunehmen, daß die auf die Schneidende FG errichteten Senkrechten FH und GN die Berührenden zuverlässig außerhalb der Berührungspunkte D und E des Bogens L schneiden.

Aus Abb. 3 ergibt sich ferner

$$DBELD = DHFOPGNELD + OBPO - HOFH - NPGN.$$

Dabei werden die unter FG liegenden Flächen positiv, die darüber liegenden negativ vorausgesetzt.

Wenn der Winkel  $\alpha$  im Punkt O und der Winkel  $\beta$  im Punkt P und die Längen  $FO = a$ ,  $OP = c$  und  $PG = b$  gemessen werden, so ist

$$OBPO = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}.$$

Mit  $FH = y_0$  und  $GN = y_{2n}$  ist

$$HCFH = \frac{a y_0}{2} \quad \text{und} \quad NPGN = \frac{b y_{2n}}{2}.$$

Die Linie des in der Bahn liegenden Bogens L hat Unstetigkeitspunkte und folgt keiner bestimmten Gleichung. Die Quadratur der Fläche DHFOPGNELD kann daher nur mit Annäherungsverfahren durchgeführt werden. Man teilt z. B. die Schneidende FG in 2n gleiche Teile, errichtet in den Teilpunkten Senkrechte und mißt in diesen Senkrechten den Abstand zwischen der Schneidenden und der Fahrkante des Außenstranges des verdrückten Bogens L. Die Fläche kann dann ziemlich genau nach der sogenannten Simpsonschen Regel bestimmt werden. Wenn der Abstand der Teilpunkte mit h und die zu den einzelnen Teilpunkten gehörigen Ordinaten mit y bezeichnet werden, dann ergibt sich

$$DHFOPGNELD = \frac{h}{3} \left[ y_0 + y_{2n} + 2 \sum_{m=1}^{m=n-1} y_{2m} + 4 \sum_{m=1}^{m=n} y_{2m-1} \right].$$

Hierbei ist angenommen, daß die Ordinaten nach abwärts positiv und nach aufwärts negativ gezählt werden. Somit ist

der Fahrkante der Außenschienen des gesuchten Bogens ist,

$$ABCMA = R^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$$

und

$$AMCKA = \frac{R^2 \pi (\alpha + \beta)}{360}$$

$$R^2 \left[ \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi (\alpha + \beta)}{360} \right] - \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin (\alpha + \beta)} - \frac{h}{3} \left[ y_0 \left( 1 - \frac{3a}{2h} \right) + y_{2n} \left( 1 - \frac{3b}{2h} \right) + 2 \sum_{m=1}^{m=n-1} y_{2m} + 4 \sum_{m=1}^{m=n} y_{2m-1} \right] = 0.$$

Aus dieser Bedingungsgleichung findet man den Halbmesser der Fahrkante der Außenschienen des gesuchten richtigen Bogens mit

$$R = \sqrt{\frac{\frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin (\alpha + \beta)} + \frac{h}{3} \left[ y_0 \left( 1 - \frac{3a}{2h} \right) + y_{2n} \left( 1 - \frac{3b}{2h} \right) + 2 \sum_{m=1}^{m=n-1} y_{2m} + 4 \sum_{m=1}^{m=n} y_{2m-1} \right]}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi (\alpha + \beta)}{360}}}$$

Der Halbmesser der Gleisachse ist  $R_m = R - 0,7175$ . Der für  $R_m$  gefundene Wert wird abgerundet. Dieser abgerundete Wert wird mit  $R_0$  bezeichnet. Dann ist der Halbmesser  $R_a$  des neuen Außenstranges  $R_a = R_0 + 0,7175$ . Mit  $R_a$  werden die Grundwerte des Bogens mit aufgerundetem Achshalbmesser bestimmt (Bogenanfang, Bogenmitte, Bogenende). Es ergibt sich:

$$d_a = R_a \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{c \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

$$e_a = R_a \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$$

$$k = OS = \frac{c \sin \beta \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin (\alpha + \beta) \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

$$s = SP = \frac{c \sin \alpha \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin (\alpha + \beta) \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

$$n = BS = \frac{c \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta) \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

$$\text{Darnach wird } ABCKA = R^2 \left[ \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi (\alpha + \beta)}{360} \right].$$

Die Bedingungsgleichung  $F = 0$  lautet demnach aufgelöst

$$q_a = R_a \left[ \sec \frac{\alpha + \beta}{2} - 1 \right]$$

$$p_a = n - q_a = \frac{c \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta) \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} - R_a \left[ \sec \frac{\alpha + \beta}{2} - 1 \right].$$

Die angeführten Formeln lassen sich vereinfachen, wenn die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  zwischen den Tangenten und der Schneidenden gleich groß gewählt werden. Zu diesem Zwecke wird der Winkel  $\alpha$  in  $O_1$  (Abb. 4) dem Augenmaß nach so angenommen, daß  $O_1 P_1$  möglichst gleichlaufend mit der vermutlichen Scheiteltangente des richtigen Bogens ist. Dadurch wird erreicht, daß die endgültige Schneidende  $O_2 P_1$ , die in  $P_1$  mit dem Winkel

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

festzulegen ist, mit größter Wahrscheinlichkeit auf dem Bahnkörper verbleibt.

Der Halbmesser des richtigen Bogens und dessen Grundwerte ergeben sich dann aus folgenden Beziehungen:

$$R = \sqrt{\frac{\frac{c^2 \operatorname{tg} \gamma}{4} + \frac{h}{3} \left[ y_0 \left( 1 - \frac{3a}{2h} \right) + y_{2n} \left( 1 - \frac{3b}{2h} \right) + 2 \sum_{m=1}^{m=n-1} y_{2m} + 4 \sum_{m=1}^{m=n} y_{2m-1} \right]}{\operatorname{tg} \gamma - \frac{\pi \gamma}{180}}}$$

Der Halbmesser der Gleisachse ist

$$R_m = R - 0,7175.$$

Wird  $R_m$  auf  $R_0$  abgerundet, so ist

$$R_a = R_0 + 0,7175$$

$$d_a = e_a = R_a \operatorname{tg} \gamma - \frac{c}{2 \cos \gamma}$$

$$k = s = \frac{c}{2}$$

$$n = c \frac{\operatorname{tg} \gamma}{2}$$

$$q_a = R_a [\sec \gamma - 1]$$

$$p_a = c \frac{\operatorname{tg} \gamma}{2} - R_a [\sec \gamma - 1].$$

$$DAKCELD = 0$$

sein (Abb. 5). Daher muß auch sein

$$ABCKA - DBELD = 0.$$

Die Fläche DBELD wird in der gleichen Weise bestimmt wie bei Berichtigung eines Bogens, der keinen Übergangsbogen erhält. Hingegen ändert sich die Bestimmung des Wertes der Fläche ABCKA. Es ergibt sich

$$ABCKA = YBZMY - MVKXM + AYUA + CWZC - UA_1VU - WB_1XW.$$

Die algebraische Summe der letzten vier Glieder kann gegen die der ersten zwei Glieder vernachlässigt werden. Dann ist angenähert

$$ABCKA = YBZMY - MVKXM.$$

Daß diese Vernachlässigung gerechtfertigt ist, ergibt sich aus der folgenden Beweisführung. Lautet die Gleichung des Übergangsbogens  $y = \frac{x^3}{6C}$ , dann ist die Fläche des Übergangsbogens zwischen der Y-Achse und einer beliebigen Ordinate a

$$F = \int_{x=0}^{x=a} y \, dx = \int_{x=0}^{x=a} \frac{x^3}{6C} \, dx = \frac{a^4}{24C}.$$

Nach dem soeben geschilderten Verfahren können Bogen ohne Übergangsbogen berichtigt werden. In den meisten Fällen werden aber bei der Berichtigung eines Bogens gleichzeitig Übergangsbogen eingelegt werden müssen. Das oben entwickelte Verfahren wird bei Einhalten dieser Forderung grundsätzlich nicht geändert. Ausdrücklich wird aber bemerkt, daß der Übergangsbogen nicht in der Gleisachse, sondern im Schienenaußenstrang angenommen wird. Es muß sonach die Fläche

Werden die Länge des Übergangsbogens mit  $l$ , die Fläche  $AYUA$  mit  $f_1$  und die Fläche  $UYC_1A_1U$  mit  $f_2$  bezeichnet und der Halbmesser der Fahrkante der Außenschienen des gesuchten richtigen Bogens mit  $\varrho$  (Abb. 6), dann ist

$$f_1 = \frac{l^4}{384 C} = \frac{l^3}{384 \varrho}$$

und

$$f_2 = \frac{l^4}{24 C} - \frac{l^4}{384 C} = \frac{15 l^4}{384 C} = \frac{15 l^3}{384 \varrho}$$

Ferner ergibt sich aus Abb. 6

$$UA_1VU = M_1B_1A_1M_1 + B_1A_1C_1YB_1 - UYC_1A_1U - M_1A_1VM_1.$$

Nun ist

$$M_1B_1A_1M_1 = (\varrho + m - y_n) \frac{1}{4} = \left(\varrho - \frac{l^2}{8\varrho}\right) \frac{1}{4}$$

$$UA_1VU = f_3 = \frac{\varrho l}{4} + \frac{5}{384} \cdot \frac{l^3}{\varrho} - \frac{\varrho^2}{2} \left[ \frac{1}{2\varrho} + \frac{l^3}{48\varrho^3} + \frac{3}{1280} \frac{l^5}{\varrho^5} \right] = f_1 \left[ 1 - \frac{9}{20} \left(\frac{l}{\varrho}\right)^2 \right].$$

Es ist demnach

$$AYUA - UA_1VU = \frac{9}{20} \left(\frac{l}{\varrho}\right)^2 \cdot f_1.$$

Da  $\frac{l}{\varrho}$  nur selten größer ist als  $\frac{1}{4}$ , wird der größte Wert des Unterschiedes  $AYUA - UA_1VU$  selten größer als  $0,03 f_1$ , ein Wert, der ohne weiteres vernachlässigt werden kann. Es gilt also in guter Annäherung die Beziehung

$$ABCKA = YBZMY - MVKXM.$$

$$ABCKA = \varrho^2 \left[ \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi(\alpha + \beta)}{360} \right] + \frac{l^2}{12} \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{l^4}{576 \varrho^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

In diesem Ausdruck kann  $\frac{l^4}{576 \varrho^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$  vernachlässigt werden, da dieser Wert kaum  $\frac{1}{3}$  v. H. des Wertes

$$\varrho^2 \left\{ \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi(\alpha + \beta)}{360} \right\} - \left\{ \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} + \frac{h}{3} \left[ y_0 \left(1 - \frac{3a}{2h}\right) + y_{2n} \left(1 - \frac{3b}{2h}\right) + 2 \sum_{m=1}^{m=n-1} y_{2m} + 4 \sum_{m=1}^{m=n-1} y_{2m-1} \right] - \frac{l^2}{12} \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \right\} = 0.$$

Aus dieser Gleichung findet man

$$\varrho = \sqrt{\frac{\frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} + \frac{h}{3} \left[ y_0 \left(1 - \frac{3a}{2h}\right) + y_{2n} \left(1 - \frac{3b}{2h}\right) + 2 \sum_{m=1}^{m=n-1} y_{2m} + 4 \sum_{m=1}^{m=n-1} y_{2m-1} \right] - \frac{l^2}{12} \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi(\alpha + \beta)}{360}}}.$$

Da alle Werte auf die Fahrkante des Schienenaußenstranges bezogen sind, ist der Halbmesser der Gleisachse

$$\varrho_m = \varrho - 0,7175.$$

Wird dieser Wert auf  $\varrho_0$  abgerundet, dann ist der zugehörige Halbmesser des Außenstranges

$$\varrho_a = \varrho_0 + 0,7175.$$

Ähnlich wie für den reinen Kreisbogen ergibt sich

$$d_a = (\varrho_a + m) \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{2} - \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$e_a = (\varrho_a + m) \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{2} - \frac{c \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$k = \frac{c \sin \beta \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin(\alpha + \beta) \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

$$\varrho = \sqrt{\frac{\frac{c^2 \operatorname{tg} \gamma}{4} + \frac{h}{3} \left[ y_0 \left(1 - \frac{3a}{2h}\right) + y_{2n} \left(1 - \frac{3b}{2h}\right) + 2 \sum_{m=1}^{m=n-1} y_{2m} + 4 \sum_{m=1}^{m=n-1} y_{2m-1} \right] - \frac{l^2}{12} \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \gamma - \frac{\pi \gamma}{180}}}.$$

$$B_1A_1C_1YB_1 = \frac{l y_n}{2} = \frac{l^3}{12 \varrho}$$

$$UYC_1A_1U = f_2 = \frac{15 l^3}{384 \varrho}$$

$$M_1A_1VM_1 = \frac{\varrho^2}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{l}{2\varrho}.$$

Mit diesen Werten ist

$$UA_1VU = \frac{\varrho l}{4} + \frac{5}{384} \frac{l^3}{\varrho} - \frac{\varrho^2}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{l}{2\varrho}.$$

Wird  $\operatorname{arc} \sin \frac{l}{2\varrho}$  als Reihe entwickelt, dann ergibt sich

$$\operatorname{arc} \sin \frac{l}{2\varrho} = \frac{l}{2\varrho} + \frac{1}{6} \left(\frac{l}{2\varrho}\right)^3 + \frac{3}{40} \left(\frac{l}{2\varrho}\right)^5 + \dots$$

Werden die Glieder von der siebenten Potenz ab vernachlässigt, dann ist

Wird  $VY = XZ = m$  gesetzt, dann ist

$$YBZMY = (\varrho + m)^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ und}$$

$$MVKXM = \frac{\varrho^2 \pi (\alpha + \beta)}{360}.$$

Es ist nun  $m = \frac{l^2}{24 \varrho}$ .

Hiermit wird

für  $ABCKA$  erreicht. Wird nun in der Bedingungsgleichung der Ausdruck für  $DBELD$  eingesetzt, der gegen früher ungeändert geblieben ist, so erhält man die Beziehung

$$s = \frac{c \sin \alpha \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin(\alpha + \beta) \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

$$n = \frac{c \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

$$q_a = \frac{\varrho_a + m}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} - \varrho_a$$

$$p_a = \frac{c \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} + \varrho_a - \frac{\varrho_a + m}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

Wird die Schneidende so gelegt, daß  $\alpha = \beta$  ist, so vereinfachen sich die Formeln. Bezeichnet man den Winkel zwischen der Schneidenden und der Berührenden mit  $\gamma$  so ist

Ferner ist

$$d_a = e_a = (\varrho_a + m) \operatorname{tg} \gamma + \frac{1}{2} - \frac{c}{2 \cos \gamma}$$

$$k = s = \frac{c}{2}$$

$$n = \frac{c}{2} \operatorname{tg} \gamma$$

$$q_a = \frac{\varrho_a + m}{\cos \gamma} - \varrho_a$$

$$p_a = \frac{c}{2} \operatorname{tg} \gamma + \varrho_a - \frac{\varrho_a + m}{\cos \gamma}$$

### 3. Verfahren mit zwei Schneidenden.

Hat der zu berichtigende Bogen eine solche Länge, daß bei Annahme nur einer Schneidenden diese zum Teil außerhalb des Unterbaues fallen würde, was eine Erschwernis für die Durchführung der Aufnahme und Absteckung wäre, oder ist die Sicht behindert, dann müssen zwei oder mehrere Schneidende angeordnet werden.

In diesen Fällen kann ähnlich vorgegangen werden, wie für den Fall einer Schneidenden soeben ausgeführt worden ist. Müssen zwei Schneidende vorgesehen werden, dann werden diese zweckmäßig so angeordnet, daß sie mit den Berührenden gleichgroße Winkel einschließen und ihr Schnittpunkt in die Halbierende des Mittewinkels fällt (Abb. 7). Mit dem angenommenen Winkel  $\gamma$  wird von dem Punkt O aus die Gerade  $OO_2$  abgesteckt und hierauf vom Punkt  $P_1$  unter dem gleichen Winkel  $\gamma$  die Gerade  $P_1O_2$ . Aus den Längen u und w und dem Winkel  $\delta$  ergibt sich das Maß x, um das Punkt  $O_2$  zu verschieben ist, damit er in die Winkelhalbierende fällt, zu

$$DHFOC_1PGNELD = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2n} + \eta_0 + \eta_{2n}) + 2 \sum_{m=1}^{m=n-1} (y_{2m} + \eta_{2m}) + 4 \sum_{m=1}^{m=n} (y_{2m-1} + \eta_{2m-1})] - \Phi.$$

$\Phi$  kann angenähert berechnet werden, wenn das Bogenstück YZ (Abb. 9) durch die Sehne ersetzt wird. Es ist

$$\Phi = \frac{\eta_0 y_{2n} \sin 2\varepsilon}{2}$$

Für die Fläche ABCKA ergibt sich

$$ABCKA = ABCMA - AMCKA.$$

Nun ist

$$ABCMA = R^2 \operatorname{ctg} (\varepsilon - \gamma)$$

$$R = \sqrt{\frac{c^2 \sin \varepsilon \sin \gamma}{\sin (\varepsilon - \gamma)} + \frac{h}{3} \left[ (y_0 + \eta_{2n}) \left( 1 - \frac{3a}{2h} \right) + (y_{2n} + \eta_0) - \frac{3y_{2n} \eta_0 \sin 2\varepsilon}{2h} + 2 \sum_{m=1}^{m=n-1} (y_{2m} + \eta_{2m}) + 4 \sum_{m=1}^{m=n} (y_{2m-1} + \eta_{2m-1}) \right] - \frac{\pi [90 - (\varepsilon - \gamma)]}{180} \operatorname{ctg} (\varepsilon - \gamma)}$$

Der Halbmesser der Gleisachse ist  $R_m = R - 0,7175$ . Wird der abgerundete Wert mit  $R_0$  bezeichnet, dann ist  $R_a = R_0 + 0,7175$ . Aus Abb. 8 ergibt sich

$$d_a = e_a = R_a \operatorname{ctg} (\varepsilon - \gamma) - c \frac{\sin \varepsilon}{\sin (\varepsilon - \gamma)}$$

$$p_a = R_a \left\{ \sec [90 - (\varepsilon - \gamma)] - 1 \right\} - \frac{c \cdot \sin \gamma}{\sin (\varepsilon - \gamma)}$$

Soll ein Übergangsbogen eingeschaltet werden, so ist ähnlich vorzugehen wie im Fall einer Schneidenden.

### 4. Verfahren mit einem Vieleckzug.

Die gestellte Aufgabe kann auch gelöst werden, wenn an die Außenschiene ein Vieleckzug eingelegt wird (Abb. 10). Dabei werden die Seiten des Vieleckzuges  $b_r$  und die Winkel zwischen den Vieleckseiten  $\gamma_r$  gemessen.

Der Winkel zwischen den Berührenden ergibt sich mit

$$\sum_{r=1}^{r=n} \gamma_r.$$

$$x = \frac{(u - w) \sin \gamma}{\sin (\delta - \gamma) + \sin \gamma}$$

Mit x ist auch die Länge c gegeben.

Der weitere Vorgang ist ähnlich wie bei einer Schneidenden. Von dem in der Bahn liegenden Bogen werden in gleichen Abständen Ordinaten auf die Schneidenden  $FC_1$  und  $C_1G$  gefällt. Dann entsteht bei  $C_1$  (Abb. 8) eine Fläche, die zweimal überdeckt ist und in Abb. 9 durch  $C_1YZ$  dargestellt ist. Wird der Inhalt dieser Fläche mit  $\Phi$  bezeichnet, dann lautet die Bedingungsgleichung

$$ABCKA - DHFOC_1PGNELD - OBPC_1O + HOFH + NPGN + \Phi = 0.$$

Dabei werden die Ordinaten der Linie L über  $FC_1$  und  $C_1G$  wieder negativ, die darunter positiv gezählt.

Es ergibt sich

$$OBPC_1O = \frac{c^2 \sin \varepsilon \sin \gamma}{\sin (\varepsilon - \gamma)}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Abschnitte FO und PG der Schneidenden  $C_1OF$  und  $C_1PG$  gleich groß gewählt worden sind, daß sonach  $FO = PG = a$  und  $FH = GN = y_0 = \eta_{2n}$  ist, wird

$$HOFH = NPGN = \frac{a y_0}{2} = \frac{a \eta_{2n}}{2}$$

Ähnlich wie bei der Lösung mit einer Schneidenden werden  $C_1F$  und  $C_1G$  je in  $2n$  gleiche Teile geteilt. Man geht hierbei vom Punkte  $C_1$  aus. In den Teilpunkten werden die Ordinaten der Linie L, bezogen auf  $OC_1$  und  $C_1P$ , bestimmt. Der Inhalt der Fläche  $DHFOC_1PGNELD$  wird wieder nach der Simpson'schen Regel festgestellt. Bezeichnet man die Ordinaten auf  $FC_1$  mit  $y_m$  und die Ordinaten auf  $C_1G$  mit  $\eta_m$ , dann ist

$$DHFOC_1PGNELD = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2n} + \eta_0 + \eta_{2n}) + 2 \sum_{m=1}^{m=n-1} (y_{2m} + \eta_{2m}) + 4 \sum_{m=1}^{m=n} (y_{2m-1} + \eta_{2m-1})] - \Phi.$$

und

$$AMCKA = \frac{R^2 \pi [90 - (\varepsilon - \gamma)]}{180}$$

Hieraus folgt

$$ABCKA = R^2 \left\{ \operatorname{ctg} (\varepsilon - \gamma) - \frac{\pi [90 - (\varepsilon - \gamma)]}{180} \right\}$$

Sonach lautet die Bedingungsgleichung für den Halbmesser der Fahrkante des Außenstranges

Die Grundgleichung bleibt auch bei diesem Verfahren die gleiche. Sie lautet

$$F = DAKCELD = 0.$$

Aus dieser Grundgleichung entsteht wieder die Bedingung

$$ABCKA - DBELD = 0.$$

Hierin ist

$$ABCKA = ABCMA - AMCKA.$$

Es ist ferner

$$ABCMA = R^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=n} \gamma_r$$

$$AMCKA = \frac{R^2 \pi \sum_{r=1}^{r=n} \gamma_r}{360}$$

und

$$DBELD = P_1 P_2 \dots P_n B P_1 - \sum_{r=1}^{r=n-1} f_r.$$

$\sum_{r=1}^{r=n-1} f_r$  ist die Summe der über den Sehnen befindlichen Flächen der einzelnen Bogenabschnitte.

Das Teilstück der Fläche  $P_1P_2 \dots P_nBP_1$  das zwischen den Ordinaten durch die Punkte  $P_r$  und  $P_{r+1}$  auf die Berührende  $P_rB$ , dieser Berührenden und der Sehne  $b_r$  liegt (Abb. 10), ist

$$\varphi_r = b_r \cos \varepsilon_r h_r + \frac{b_r^2 \cos \varepsilon_r \sin \varepsilon_r}{2}$$

Aus Abb. 10 ergibt sich ferner die Ordinate  $h_r$  des Punktes  $r$  auf die erste Berührende zu

$$h_r = \sum_{m=1}^{m=r-1} b_m \sin \varepsilon_m$$

und der Winkel  $\varepsilon_m$  zwischen  $b_m$  und der ersten Berührenden mit

$$\varepsilon_m = \sum_{m=1}^m \gamma_m$$

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^{r=n-1} \left\{ \left[ \sum_{m=1}^{m=r-1} \left( b_m \sin \sum_{m=1}^m \gamma_m \right) + \frac{b_r}{2} \sin \sum_{m=1}^{m=r} \gamma_m \right] b_r \cos \sum_{m=1}^{m=r} \gamma_m - \left[ \sum_{m=1}^{m=r-1} \left( b_r \sin \sum_{m=1}^m \gamma_m \right) \right]^2 \operatorname{ctg} \sum_{m=1}^{m=r} \gamma_m}{2} - \frac{\sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{b_r}{9} [(y_2 + y_4) + 2(y_1 + y_3 + y_5)]}{2} \right\}}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=n} \gamma_r - \frac{\pi \sum_{r=1}^{r=n} \gamma_r}{360}}$$

Ist der abgerundete Halbmesser  $R_0$ , so ist nach Abb. 10 der Abstand des Bogenanfangspunktes vom Punkt  $P_1$

$$d = \sum_{r=1}^{r=n-1} \left( b_r \cos \sum_{m=1}^{m=r} \gamma_m \right) - \left[ \sum_{r=1}^{r=n-1} \left( b_r \sin \sum_{m=1}^m \gamma_m \right) \right] \operatorname{ctg} \sum_{r=1}^{r=n} \gamma_r - R_0 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=n} \gamma_r$$

Sind Übergangsbogen einzuschalten, so ist die Rechnung ähnlich zu ändern wie im Falle einer Schneidenden.

### 5. Verfahren Nalenz-Höfer.

Die Grundbedingung  $F = 0$  gilt, wie erwähnt, allgemein. Sie ist auch bei dem bekannten und vielfach angewendeten Nalenz-Höfer-Verfahren eingehalten, wie im folgenden nachgewiesen wird.

Bei diesem Verfahren werden an dem in der Bahn liegenden Bogen in Punkten  $m-1$ ,  $m$ ,  $m+1$ , die gleich weit voneinander abstehen, die Pfeilhöhen  $f_{m-1}$ ,  $f_m$ ,  $f_{m+1}$  gemessen. Die Pfeilhöhen des gesuchten richtigen Bogens seien

$$\varphi_{m-1} = \varphi_m = \varphi_{m+1} \text{ (Abb. 12).}$$

Die Pfeilhöhen dieser beiden Bogen ergeben sich aus

$$f_{m-1} = \frac{2r_{m-1} - f_{m-1}}{s^2} \sim \frac{\sigma_{m-1}^2}{2\varrho} \quad \varphi_{m-1} = \frac{\sigma_{m-1}^2}{2\varrho} \sim \frac{s^2}{2\varrho}$$

$$f_m \sim \frac{2r_m}{s^2} \quad \varphi_m = \frac{\sigma_m^2}{2\varrho} \sim \frac{s^2}{2\varrho}$$

$$f_{m+1} \sim \frac{2r_{m+1}}{s^2} \quad \varphi_{m+1} = \frac{\sigma_{m+1}^2}{2\varrho} \sim \frac{s^2}{2\varrho}$$

Beim Nalenz-Höfer-Verfahren werden nun die zu den einzelnen Punkten  $r$  gehörenden Pfeilhöhensummen von einer Grundlinie aus in gleichen Abständen aufgetragen (Abb. 13), und zwar die zum Punkt  $r$  gehörende Summe um einen halben Ordinatenabstand von diesem Punkt entfernt. Werden die so gefundenen Punkte verbunden, so entsteht die sogenannte Krümmungslinie. Für den gesuchten Bogen ist die Krümmungslinie in Abb. 13 gestrichelt dargestellt, für den in der Bahn liegenden Bogen mit einer vollen Linie.

Es sind sonach die Ordinaten der Krümmungslinie für den in der Bahn liegenden Bogen

$$y_{n+\frac{1}{2}} = \sum_{r=1}^{r=n} f_r$$

für den gesuchten Bogen sind die Ordinaten dieser Linie

$$y_{n+\frac{1}{2}} = \sum_{r=1}^{r=n} \varphi_r$$

Der Winkel  $\varepsilon_r$  zwischen  $b_r$  und der Berührenden ist

$$\varepsilon_r = \sum_{m=1}^{m=r} \gamma_m$$

Die ganze Fläche  $P_1P_2 \dots P_nBP_1$  hat somit den Wert

$$\Phi = \sum_{r=1}^{r=n-1} \varphi_r = \sum_{r=1}^{r=n-1} \left\{ \left[ \sum_{m=1}^{m=r-1} \left( b_m \sin \sum_{m=1}^m \gamma_m \right) + \frac{b_r}{2} \sin \sum_{m=1}^{m=r} \gamma_m \right] b_r \cos \sum_{m=1}^{m=r} \gamma_m \right\}$$

Die gesuchte Fläche ergibt sich aus

$$P_1P_2 \dots P_nBP_1 = P_1P_2 \dots P_nB_1P_1 - BB_1P_nB = \Phi - BB_1P_nB$$

Aus Abb. 10 ist

$$BB_1P_nB = \psi = \left[ \sum_{r=1}^{r=n-1} \left( b_r \sin \sum_{m=1}^m \gamma_m \right) \right]^2 \operatorname{ctg} \sum_{r=1}^{r=n} \gamma_r$$

Die Fläche  $f_r$  kann wieder mit der Simpsonschen Regel berechnet werden. Mit den Bezeichnungen in Abb. 11 ist

$$f_r = \frac{b_r}{9} [(y_2 + y_4) + 2(y_1 + y_3 + y_5)]$$

Werden die für die einzelnen Flächen erhaltenen Werte in die Bedingungsgleichung  $F = 0$  eingesetzt, dann ergibt sich

Der Unterschied der Ordinaten beider Krümmungslinien ist

$$u_{n+1} = y_{n+\frac{1}{2}} - \eta_{n+\frac{1}{2}} = \sum_{r=1}^{r=n} (f_r - \varphi_r)$$

Die Summen der Unterschiede der Krümmungslinien werden von einer Grundlinie aus, und zwar in den gleichen Abständen voneinander wie die Summen der Pfeilhöhen aufgetragen, aber um einen halben Abstand in der Richtung nach rechts verschoben. Die Summe dieser Unterschiede die zum Punkt  $n-1$  gehören, werden also im Punkt  $n$  aufgetragen, die zum Punkt  $n$  gehörenden im Punkt  $n+1$ , die zum Punkt  $n+1$  gehörenden im Punkt  $n+2$  usw. Die Linie, die entsteht, wenn die Endpunkte dieser Ordinaten verbunden werden, heißt Summenlinie (Abb. 14). Werden die Ordinaten dieser Linie mit  $t$  bezeichnet, so ist

$$t_m = \sum_{n=1}^{n=m} \sum_{r=1}^{r=n-1} (f_r - \varphi_r)$$

Es ist nun die Frage, welche Bedeutung der Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{n=m} \sum_{r=1}^{r=n-1} (f_r - \varphi_r) \text{ besitzt.}$$

Aus Abb. 15 ergibt sich, wenn die Pfeilhöhe im Punkt  $r$  mit  $f_r$ , die Sehne zwischen den einzelnen Punkten mit  $s$  und der Winkel zwischen diesen Sehnen  $s$  und der Sehne zwischen den Punkten  $r-1$  und  $r+1$  mit  $\alpha_r$  bezeichnet wird,

$$\sin \alpha_1 = \frac{f_1}{s}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{f_2}{s}$$

$$\sin \alpha_3 = \frac{f_3}{s}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Wegen der Kleinheit der Winkel kann  $\sin \alpha_1 = \alpha_1$  gesetzt werden, dann ist

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{f_1}{s} \\ \alpha_2 &= \frac{f_2}{s} \\ \alpha_3 &= \frac{f_3}{s} \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Winkel, die zwischen den Sehnen s und der Anfangsberührenden liegen, sind

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2 \alpha_1 &&= 2 \frac{f_1}{s} \\ \beta_2 &= 2 \alpha_1 + 2 \alpha_2 &&= 2 \left( \frac{f_1}{s} + \frac{f_2}{s} \right) \\ \beta_3 &= 2 \alpha_1 + 2 \alpha_2 + 2 \alpha_3 &&= 2 \left( \frac{f_1}{s} + \frac{f_2}{s} + \frac{f_3}{s} \right) \\ &\vdots \\ \beta_n &= 2 \sum_{r=1}^{r=n} \alpha_r &&= 2 \sum_{r=1}^{r=n} \frac{f_r}{s} \end{aligned}$$

Für den zu suchenden Bogen ergibt sich, da er die Anfangsberührende auf jeden Fall berühren muß, der Winkel zwischen der Sehne und einer Gleichlaufenden zu dieser Berührenden im Punkte n mit

$$\beta_n' = \frac{2}{s} \sum_{r=1}^{r=n} \varphi_r$$

Wenn in Abb. 16 L die Linie des in der Bahn liegenden Bogens ist, K der gesuchte Bogen,  $v_n$  die Verschiebung, die im Punkte n notwendig ist, um von dem in der Bahn liegenden Bogen zum gesuchten Bogen zu gelangen, dann ist der Unterschied der erforderlichen Verschiebungen in den Punkten  $n-1$  und n

$$\Delta v_n = v_n - v_{n-1} = s \Delta \beta_{n-1} = s [\beta_{n-1} - \beta_{n-1}'] = 2 \sum_{r=1}^{r=n-1} (f_r - \varphi_r) *$$

Da aber

$$v_m = \sum_{n=1}^{n=m} \Delta v_n$$

ist, so ist auch

$$v_m = 2 \sum_{n=1}^{n=m} \sum_{r=1}^{r=n-1} (f_r - \varphi_r)$$

Vergleicht man diese Formel mit der Formel für die Ordinate der Summenlinie im Punkte m, so sieht man, daß

$$t_m = \frac{v_m}{2} \text{ ist.}$$

Wird der Maßstab für die Auftragung der Pfeilhöhen entsprechend gewählt, dann sind die Ordinaten der Summenlinie gleich der in den einzelnen Punkten erforderlichen halben Verschiebung.

Die Fläche S der Summenlinie ist, wenn der Abstand der Ordinaten gleich der halben Sehne s genommen wird, angenähert

$$S = \sum \frac{v_m}{2} s = \frac{1}{2} \sum v_m s$$

Wird nun die Krümmungslinie des gesuchten Bogens so gelegt, daß die über und unter der Abszissenachse befindlichen Teilflächen der Summenlinie gleich groß werden, dann ist

$$S = \frac{1}{2} \sum v_m s = 0$$

Es ist hiermit bewiesen, daß auch beim Nalenz-Höfer-Verfahren die Grundbedingung  $F = 0$  eingehalten ist, wenn die Krümmungslinie entsprechend eingelegt wird.

\*) Die Gleichung  $\Delta v_n = s \Delta \beta_{n-1}$  findet sich in veränderter Form schon im Heft 16 des 86. Jahrgangs dieser Zeitschrift im Aufsatz „Allgemeine Theorie des Nalenz-Höfer-Verfahrens“ von Dr. Ing. Gerhard Schramm.

## Verschiedenes.

### Rangiertechnik.

Die Studiengesellschaft für Rangiertechnik (Stugera) hat im Heft 13 des Jahrgangs 1932 der „Verkehrstechnischen Woche“ ihren Jahresbericht für das Geschäftsjahr 1931 veröffentlicht und das Heft zu einem „5. Sonderheft für Rangiertechnik“ ausgestaltet.

Die Gesellschaft hielt im März 1931 in Essen und im Oktober in Halle (Saale) eine Mitgliederversammlung ab, wobei die hochmechanisierten Anlagen, der „Hafenbetriebsgesellschaft Wanneherne“, des Mannheimer Kohlenkontors und des Verschiebebahnhofes Osterfeld Süd (Ost) besichtigt wurden.

Den Berichten der Ausschüsse entnehmen wir:

Sonderausschuß I. Die Untersuchungen über Beidrückeinrichtungen haben bisher nicht zu einem befriedigenden Ergebnis geführt. Die Arbeiten über Kleinbremsen einer Bauart Thyssen, elektromagnetische Rangierbremsen und Hemmschuhbremsen Bauart Bäseler sind abgeschlossen mit dem Ergebnis, daß der Hauptverwaltung der Deutschen Reichsbahn-Gesellschaft ihre Einführung zur Erprobung empfohlen werden konnte. Der Ausschuß hat „Vorläufige Grundsätze für Wirbelstrombremsen“ und „Vorläufige Grundsätze für Hemmschuhbremsen“ aufgestellt, die im Sonderheft abgedruckt sind.

Sonderausschuß II berichtet über die Ersparnisse an Nachbremsarbeit durch ablaufdynamisch richtig durchgebildete Gleisanlagen mit guten Balkenbremsen. Über die Auswertung der vorjährigen Versuche des Ausschusses mit Windschutzanlagen ist im Sonderheft ein eigener Aufsatz enthalten, der zu dem Ergebnis kommt, daß nächst den 4 bis 5 m hohen auf dem Boden stehenden Längsgittern mit schräg gestellten Gitterstäben Quergitter mit 2,5 m Höhe aus senkrechten 20 cm breiten Bohlen und einem untenliegenden Vollwandstreifen die aerodynamisch günstigste und zugleich billigste Lösung darstellen.

Sonderausschuß III hat seine Untersuchungen über den zweckmäßigen Umfang der Weichenautomatisierung beendet. Sie

befassen sich im wesentlichen mit dem Vorteil, der bei der büschelförmigen Gleisentwicklung neben der schnelleren Verteilung der Wagen einerseits in der geringeren Zahl der Gesamtbefahrungen der Weichen (Abnutzung!) zu suchen ist, andererseits in der Anhäufung der Trennungsvorgänge in den vordersten Weichen, sodaß, wenn die Automatisierung nur erfolgt, um die Leistung zu steigern, nur wenige Weichen automatisiert zu werden brauchen.

Demgegenüber kann der Nachteil einer etwas größeren Gesamtzahl der Umstellungen nicht ins Gewicht fallen.

Bezüglich der Ablaufstellwerke kommt der Ausschuß zu dem Ergebnis, daß die Zusammenlegung von Weichen- und Bremsbedienung in einer Hand meist nicht möglich ist, wenn Höchstleistungen erstrebt werden, daß aber Bremswärter und Weichensteller in einem gemeinsamen Raum mit nötigem Überblick und mit den entsprechenden neuzeitlichen Einrichtungen untergebracht werden sollen.

Aus den anschließenden Aufsätzen heben wir hervor:

Eine Abhandlung über die ungemein verwickelten Zusammenhänge bei gleichzeitiger Abstands- und Laufzielbremsung mit zwei Bremsstaffeln zeigt an einem Beispiel, wie bei gegebenem Höhenplan die Bremsanordnung, die beherrschte Zielweite und die Zerleggeschwindigkeit sich wechselseitig beeinflussen.

Ein Beispiel aus der Praxis bringt eine Beschreibung des Ausbaues des Verschiebebahnhofes Duisburg-Hochfeld Süd.

Ein Bericht über Unterschiede in den betrieblichen und wirtschaftlichen Voraussetzungen der Mechanisierung in Nordamerika und Europa zeigt die Gründe, warum man sich dort erst allmählich über Bremsanordnungen mit vielen leichten Bremsen in der ganzen Weichenzone und allen Richtungsgleisen den in Europa üblichen Anordnungen nähert.

Eine Abhandlung über eine nomographische Rechentafel zum schnellen Aufzeichnen der Zeitweglinien schließt das Heft.

Sp.